25. Балканска математичка олимпијада

Охрид, Македонија – 6. мај 2008.

1. Дат је разностранични оштроугли троугао ABC у коме је $AC > BC$. Нека је O центар описаног круга и H ортоцентар троугла ABC, и нека је F подножје висине из темена C. Тачка P (различита од A) је одабрана на правој AB тако да је $AF = PF$, а M је средиште дужи AC. Нека је X пресек правих PH и BC, Y пресек правих OM и FX, и Z пресек правих OF и AC. Доказати да тачке F, M, Y и Z леже на истом кругу.

2. Да ли постоји низ $a_1, a_2, \ldots$ позитивних бројева који задовољава следећа два услова:

(и) $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2$ за сваки природан број n;

(ии) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 2008$ за сваки природан број n?

3. Нека је n природан број. Правоугаоник $ABCD$ са страницама $90n+1$ и $90n+5$ подељен је на јединичне квадрате са страницама паралелним страницама правоугаоника. Нека је S скуп свих темена ових јединичних квадрата. Доказати да је број правих које садрже бар две тачке из S дељив са 4.

4. Нека је c природан број. Низ $a_1, a_2, \ldots$ је дефинисан са $a_1 = c$ и $a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3$ за сваки природан број n. Одредити све вредности c за које постоје цели бројеви $k \geq 1$ и $m \geq 2$ такви да је број $a_k^2 + c^3$ једнак m-том степену неког природног броја.

Време за рад: 4 сата и 30 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.