28. TURNIR GRADOVA
Prolećno kolo.

Pripremna varijanta, 25. februar 2007. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (4 poena) Pet duži je nacrtano (ne podižući olovku sa papira) tako da je dobijena petokraka zvezda, podeljena povučenim dužima na pet trouglova i jedan petougao. Pokazalo se da su svih 5 trouglova podudarni. Da li je tada obavezno petougao pravilan (tj. ima jednake sve stranice i sve uglove jednake)?

2. (4 poena) Na tabli su napisana dva 2007-cifrena broja. Zna se da kod svakog možemo precrtati 7 cifara tako da ostanu jednaki brojevi. Dokažite da u polazne brojeve možemo ubaciti (upisati) po 7 cifara, tako da se takođe dobiju jednaki brojevi.

3. (4 poena) Koliko najmanje topova možemo postaviti na šahovsku tablu 8×8 tako da sva bela polja budu napadnuta (tučena) tim topovima? (Napadnutim poljima smatramo sva polja kolone i reda u kojima se nalazi top).

4. (4 poena) Data su tri realna broja različita od nule. Ako ih, u bilo kom poretku, uzmemo za koeficijente kvadratnog trinoma, onda će taj trinom imati realan koren (realnu nulu). Da li je tačno da će svaki od tih trinoma imati pozitivan koren?

5. **a)** (1 poen) Torta ima oblik trougla kod koga je jedan ugao tri puta veći od drugog. Kutija za tortu ima oblik istog takvog trougla, ali simetričnog s njim u odnosu na neku pravu. Kako razrezati tortu na dva dela koji se (bez obrtanja-prevrtanja) mogu smestiti u tu kutiju?

b) (4 poena) Uradite isti zadatak, ali za tortu koja ima oblik tupouglog trougla u kome je tup ugao dva puta veći od jednog od oštrih uglova.

(Tortu i kutiju smatrajte ravnim figurama.)

28. TURNIR GRADOVA
Prolećno kolo.

Pripremna varijanta, 25. februar 2007. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Polja table 9×9 obojena su crnom i belom bojom kao na šahovskoj tabli Ugaona polja su bela. Koji najmanji broj topova treba postaviti na tu tablu da bi ti topovi tukli sva bela polja. (Kaže se da top tuče neko polje ako se ono nalaze u vrsti i koloni u kojoj se taj top nalazi).

2. (4 poena) Polinom $x^3 + px^2 + qx + r$ ima tri korena u intervalu (0, 2) . Dokažite da važi nejednakost: −2 < *p*+*lj*+*r* < 0

3. (4 poena) Prava dodiruje kružnicu u tački A. Na pravoj je izabrana tačka B, pa je duž AB rotirana za neki ugao oko centra kružnice. Tako je dobijena duž A′B′. Dokažite da prava, koja prolazi kroz tačke dodira A i A′**,** polovi duž BB′.

4. (4 poena) Niz nula i jedinica nastao je na sledeći način: na *k*-tom mestu piše se nula ako je zbir cifara (rednog) broja *k* paran, a inače (ako je zbir cifara broja *k* neparan) piše se jedinica. Dokažite da je taj niz cifara neperiodičan. (Evo početka tog niza: 10101010110101010101001…..)

Niz nazivamo periodičnim, ako postoji prirodan broj *d*, takav da se uvek podudaraju dva člana niza, čiji se indeksi (redni brojevi) razlikuju za *d.*

5. a) (3 poena) Torta ima oblik tupouglog trougla kod kojeg je tup ugao dva puta veći od jednog od oštrih uglova. Kutija za tortu ima oblik istog takvog trougla, ali simetričnog s njim u odnosu na neku pravu. Kako razrezati tortu na dva dela koji se (bez obrtanja-prevrtanja) mogu smestiti u tu kutiju?

b) (3 poena) Uradite isti zadatak za tortu koja ima oblik trougla sa uglovima od 20^o, 30^o i 130^o.

(Tortu i kutiju smatrajte ravnim figurama.)

28. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Osnovna varijanta, 4. mart 2007. god.

8–9. razred (mlađi uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena, a poeni za delove jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Dat je prirodan broj *N*. Da bismo našli ceo broj, najbliži kvadratnom korenu iz *N*, iskoristićemo sledeći način: među kvadratima prirodnih brojeva nađimo broj a^2, najbliži broju *N*; tada će i *a* biti traženi broj. Da li uvek takav način daje pravilan odgovor?

2. (4 poena) Na stranicama jediničnog kvadrata označene su tačke *K, L, M* i N tako da je *KM* paralelno dvema stranicama kvadrata, a *LN* paralelno sa dve druge stranice kvadrata. Duž *KL* od kvadrata odseca trougao obima 1. Kolika je površina trougla koji od kvadrata odseca duž *MN*?

3. (5 poena) Pera je uzeo dvadeset uzastopnih prirodnih brojeva, zapisao ih je jedan za drugim nekim redom i tako dobio broj M. Vasa je uzeo dvadeset jedan uzastopni prirodan broj, zapisao ih jedan za drugim po nekom redu i tako je dobio broj *M*. Da li se moglo dogoditi da bude *M*=*N* ?

4. (poena) U konveksnom mnogouglu povučeno je nekoliko dijagonala (moguće i takvih da se seku) tako da se ni u kojoj tački unutar mnogougla ne seku tri ili više dijagonala. Pokazalo se da je na kraju mnogougao podeljen na trouglove. Koliki je najveći mogući broj tih trouglova?

5. (7 poena) Pronađite sve rastuće aritmetičke progresije, čiji su članovi prosti brojevi sa svojstvom da je broj članova progresije konačan i veći od razlike progresije.

6. (8 poena) Kod četvorougla *ABCD* stranice *AB, BC* i *CD* su jednake, tačka *M* je središte stranice *AD*. Poznato je da je ugao *BMC* jednak 90^0. Nađite koliki je ugao između dijagonala četvorougla *ABCD.*

7. Kapetan Vrungel u svojoj kabini je promešao špil od 52 karte i rasporedio ih po krugu, ostavivši jedno slobodno mesto. Mornar Fuks s palube, ne odvajajući se od svog kormila i ne znajući početni raspored, imenuje kartu. Ako je ta karta do slobodnog mesta, Vrungel je premešta na to slobodno mesto, ne govoreći Fuksu o tome ništa. U protivnom slučaju ništa se ne dešava. Fuks onda imenuje još jednu kartu, i tako koliko hoće puta, sve dok on ne kaže “stop”.

(5 poena) a) Može li Fuks postići to da se posle “stop” svaka karta nađe tamo gde nije bila na početku?

(5 poena) b) Može li Fuks postići to, da posle “stop” pored slobodnog mesta ne bude as (kec) pik?

28. TURNIR GRADOVA

Prolećno kolo.

Osnovna varijanta, 4. mart 2007. god.

10–11. razred (stariji uzrast)

(Rezultat se računa na osnovu tri zadatka na kojima je dobijeno najviše poena. Poeni po delovima jednog zadatka se sabiraju)

---

1. (3 poena) Na paraboli $y = x^2$ uzete su četiri tačke *A, B, C, D*, tako da se duži *AB* i *CD* seku na ordinatnoj osi. Nađite apscisu tačke *D,* ako su apscise tačaka *A, B* i *C* redom *a, b* i *c*.

2. (5 poena) Konveksna figura *F* ima sledeće svojstvo: ma koji jednakostranični trougao stranice 1 može se paraleln o premestiti tako da se sva njegova temena nađu na obodu (granici) figure *F*. Sledi li iz tog svojstva da je *F* krug?

3. (5 poena) Neka je *f(x)* neki polinom nenultog stepena. Može li se desiti da jednačina *f(x)=a* za ma koju vrednost *a* ima paran broj rešenja?

4. Kapetan Vrungel u svojoj kabini je promešao špil od 52 karte i rasporedio ih po krugu, ostavivši jedno slobodno mesto. Mornar Fuks s palube, ne odvajajući se od svog kormila i ne znajući početni raspored, imenuje kartu. Ako je ta karta do slobodnog mesta, Vrungel je premešta na to slobodno mesto, ne govoreći Fuksu o tome ništa. U protivnom slučaju ništa se ne dešava. Fuks onda imenuje još jednu kartu, i tako koliko hoće puta, sve dok on ne kaže “stop”.

(4 poena) a) Može li Fuks postići to da se posle “stop” svaka karta nađe tamo gde nije bila na početku?

(4 poena) b) Može li Fuks postići to, da posle “stop” pored slobodnog mesta ne bude as (kec) pik?

5. (8 poena) Od pravilnog oktaedra stranice 1 odrezano je 6 uglova - piramidica sa kvadratnom osnovom i bočnom ivicom $\frac{1}{3}$. Dobijen je poliedar čije su strane kvadrati i pravilni šestouglovi. Može li se kopijama takvog poliedra popuniti prostor?

6. (4 poena) Dat je iracionalan broj *a*, takav da je $0<a<\frac{1}{2}$. Prema njemu se određuje novi broj a_1 kao manji od dva broja $2a$ i $1-2a$. Prema ovom broju se onda određuje a_2, i tako dalje.

(4 poena) a) Dokažite da je za neko *n* ispunjena nejednakost $a_n < \frac{3}{16.}$.

(4 poena) b) Može li se dogoditi da bude $a_n > \frac{7}{40}$ za svaki prirodan broj *n*?

7. (8 poena) Stranice trougla *ABC* vide se iz tačke *T* pod uglovima od 120^o. Dokažite da se prave simetrične pravama *AT, BT* i *CT* u odnosu na prave *BC, CA* i *AB* (tim redom) seku u jednoj tački.