СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 02.04.2007.

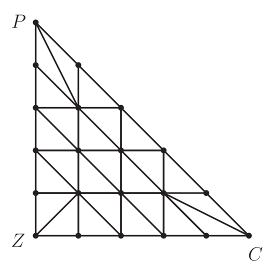
Први дан

1. Нека је D тачка на страници AC троугла ABC у коме је $AB < BC$ таква да је $AB = BD$. Круг уписан у $\triangle ABC$ додирује AB у K и AC у L, а J је центар уписаног круга троугла BCD. Доказати да KL полови дуж AJ.

2. Троугао $\triangle ZCP$ је подељен на 25 „малих“ троуглова (као на слици), а затим су сва темена тих троуглова обојена са три боје на следећи начин:

теме Z је обојено зеленом бојом, теме C црвеном, а теме P плавом;

свако од темена на дужи ZC обојено је или зеленом или црвеном бојом, свако од темена на дужи CP обојено је или црвеном или плавом бојом, а свако од темена на дужи ZP обојено је или зеленом или плавом бојом. Сва темена која се налазе у унутрашњости троугла обојена су без ограничења, једном од три боје.



Доказати да без обзира на начин бојења, бар један од 25 „малих“ троуглова има сва три темена различите боје.

3. Одредити све парове природних бројева (x, n) који су решења једначине

$$x^3 + 2x + 1 = 2^n.$$

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 03.04.2007.

Други дан

4. Нека је k природан број. За сваку функцију $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, нека је низ функција $(f_m)_{m\geqslant 1}$ дефинисан са $f_1=f$ и $f_{m+1}=f\circ f_m$ за $m\geqslant 1$. Функција f је k-*фина* уколико за све $n\in\mathbb{N}$ важи

$$f_k(n)=f(n)^k.$$

(а) За које k постоји *1-1 k-фина* функција f?

(б) За које k постоји *на k-фина* фунција f?

5. Дат је неједнакокраки троугао ABC. Нека су AD, BE, CF симетрале углова овог троугла ($D\in BC$, $E\in AC$, $F\in AB$). Нека су K_a, K_b, K_c тачке на уписаном кругу троугла ABC такве да су DK_a, EK_b, FK_c тангенте на уписани круг и да $K_a\notin BC$, $K_b\notin AC$, $K_c\notin AB$. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB. Доказати да се праве A_1K_a, B_1K_b, C_1K_c секу на уписаном кругу троугла ABC.

6. Нека је k природан број. Доказати да за позитивне реалне бројеве x,y,z чији је збир једнак 1, важи неједнакост

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k}+\frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k}+\frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k}\geqslant\frac{1}{7}\,.$$

Када важи једнакост?

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

РЕШЕЊА

1. Нека је M тачка на AC таква да је $JM \parallel KL$. Довољно је доказати да је $AM = 2AL$.

Из $\sphericalangle BDA = \alpha$ добијамо $\sphericalangle JDM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle KLA = \sphericalangle JMD$, па је $JM = JD$, а додирна тачка уписаног круга $\triangle BCD$ са CD је средиште T дужи MD. Према томе, $DM = 2DT = BD + CD - BC = AB - BC + CD$, одакле је

$$AM = AD + DM = AC + AB - BC = 2AL.$$

2. Посматраћемо странице малих троуглова које имају једно теме обојено црвеном, а друго плавом бојом. Такве странице ћемо звати црвено-плаве странице.

Свака црвено-плава страница која се налази у унутрашњости троугла $\triangle ZCP$ је страница тачно два мала троугла. Даље, свака црвено-плава страница која налази на једној од страница троугла $\triangle ZCP$ по услову задатка мора припадати баш дужи CP. С обзиром да је теме C обојено црвеном бојом а P плавом, број црвено-плавих страница на дужи CP је непаран.

Према томе, мора постојати бар један мали троугао који има непаран број црвено-плавих страница. Тај троугао мора да има сва три темена различите боје.

3. Провером се добија да је за $n \leqslant 2$ једино решење пар $(1, 2)$. Докажимо да за $n \geqslant 3$ нема решења.

Број x мора бити непаран, па је $x^2 + 2 \equiv 3 \pmod 8$. Сада из $x(x^2 + 2) \equiv -1 \pmod 8$ следи да је $x \equiv 5 \pmod 8$. Шта више, како $3 \mid x(x^2 + 2)$ (уколико $3 \nmid x$ тада $3 \mid x^2 + 2$), мора бити $2^n \equiv 1 \pmod 3$, па је n паран број.

Додавањем обема странама једнакости броја 2 добија се

$$(x + 1)(x^2 - x + 3) = 2^n + 2.$$

Како је n паран, 2^n је потпун квадрат, па је број -2 квадратни остатак по сваком непарном простом делиоцу p броја $(x + 1)(x^2 - x + 3)$. Зато је

$$1 = \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{(p-1)(p+5)}{8}},$$

одакле следи да је p облика $8k + 1$ или $8k + 3$. Будући производ таквих простих бројева, и сам број $x^2 - x + 3$ мора бити тог облика. Међутим, како је $x \equiv 5 \pmod 8$, важи $x^2 - x + 3 \equiv 7 \pmod 8$ што је контрадикција.

Дакле, једино решење дате једначине је $(x, n) = (1, 2)$.

4. Свака функција је 1-*фина*, па је одговор на оба дела задатка потврдан. Нека је надаље $k \geqslant 2$. Свака k-фина функција је *1-1* јер из $f(m) = f(n)$ следи $m^k = f_k(m) = f_k(n) = n^k$, тј. $m = n$.

(а) Одговор: ДА. Конструишимо функцију f индуктивно на следећи начин. Нека је n најмањи природан број чија слика није одређена.

(1) ако је $n = 1$, онда је $f(n) = 1$;
(2) ако је $n = a^k$ за неко цело $a > 1$, дефинишемо $f(n) = f(a)^k$;
(3) ако n није потпун k-ти степен изаберемо најмањих $k-1$ природних бројева $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ који нису потпуни k-ти степени и за које до сада нису одређене слике, и дефинишемо $f(n_1) = n_2$, $f(n_2) = n_3$, $\ldots$, $f(n_{k-1}) = n_1^k$.

На овај начин функција f је добро дефинисана. Покажимо да је она k-фина. За свако $n \in \mathbb{N}$ које није k-ти степен постоје бројеви $n_1, \ldots, n_{k-1}$ из услова (3) такви да је $n_i = n$ за неко $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Тада важи $f_k(n_i) = f_i(n_1^k) = f_i(n_1)^k = f(n_i)^k$. Такође, ако је n потпун k-ти степен, тада је $n = n_i^{k^s}$ за неко i и s, па према (2) важи $f_k(n) = f_k(n_i)^{k^s} = n_i^{k^{s+1}} = n^k$, што доказује наше тврђење.

(б) Одговор: НЕ. Заиста, ако је f *на* и k-фина, за свако a_0 постоји низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots$ таквих да је $f(a_{k+1}) = a_k$ за све k, одакле је $a_k^k = f_k(a_k) = a_0$, што је немогуће ако a_0 није k-ти степен.

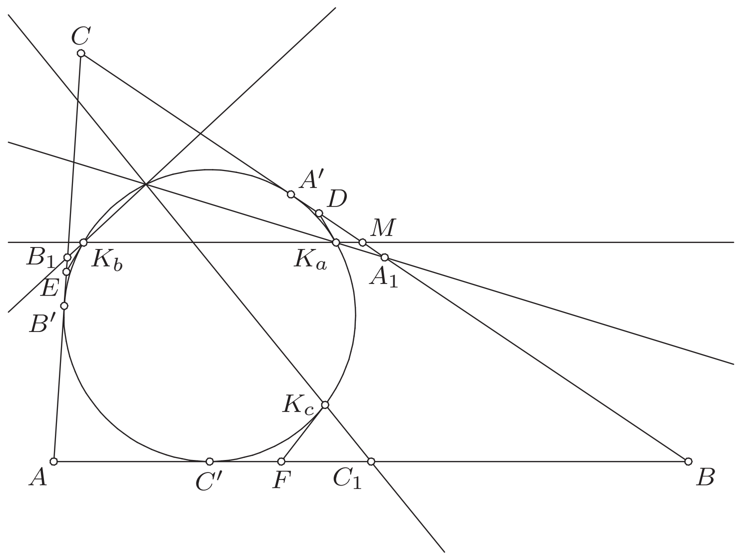
5. Докажимо да су троуглови $K_aK_bK_c$ и $A_1B_1C_1$ хомотетични. Да бисмо то доказали, довољно је да докажемо да је $K_aK_b \parallel A_1B_1$, односно $K_aK_b \parallel AB$ (аналогно ће следити и за друге парове страница).

Означимо $M = K_aK_b \cap BC$, са S означимо центар уписаног круга, и са T означимо произвољну тачку на уписаном кругу. Означимо $\alpha = \sphericalangle BAS$, $\beta = \sphericalangle CBS$, $\gamma = \sphericalangle ACS$. Користећи оријентисане углове (по модулу $180°$), добијамо $\sphericalangle B'EB = \beta + 2\gamma$, и аналогно $\sphericalangle A'DA = \alpha + 2\beta$, а одатле и $\sphericalangle A'DK_a = 2\alpha + 4\beta$. Затим, $\sphericalangle B'TK_b = \sphericalangle B'SE = 90° + \sphericalangle B'ES = \gamma - \alpha$ и аналогно $\sphericalangle A'TK_a = \beta - \gamma$. Затим, $\sphericalangle A'TB' = \sphericalangle A'SC = 90° + \sphericalangle A'CS = \alpha + \beta$. И на крају добијамо $\sphericalangle K_aTK_b = \sphericalangle K_aTA' + \sphericalangle A'TB' + \sphericalangle B'TK_b = 2\gamma$.

Такође, из троугла DK_aM добијамо $\sphericalangle CMK_a = \sphericalangle CDK_a + \sphericalangle DK_aM = \sphericalangle A'DK_a + \sphericalangle DK_aK_b = (2\alpha + 4\beta) + \sphericalangle K_aTK_b = (2\alpha + 4\beta) + 2\gamma = 2\beta$. Дакле, $\sphericalangle CMK_a = \sphericalangle CBA$, одакле следи да је $K_aK_b \parallel AB$, што је требало доказати. Дакле, троуглови $K_aK_bK_c$ и $A_1B_1C_1$ су хомотетични.

Приметимо такође да је коефицијент хомотетије позитиван: ако би био негативан, дужи K_aA_1, K_bB_1, K_cC_1 би се секле у једној тачки. Ако је $\alpha > \beta$, онда се тачке C_1 и K_c, па и цела дуж K_cC_1, налазе унутар четвороугла $SFBD$. Зато, ако без умањења општости претпоставимо $\alpha > \beta > \gamma$, онда $K_cC_1 \subset SFBD$, али $K_aA_1 \subset SDCE$, па су ове две дужи дисјунктне.

Како су троуглови $K_aK_bK_c$ и $A_1B_1C_1$ хомотетични, њихови описани кругови су такође хомотетични. Али то су Ојлеров и уписани круг троугла ABC, респективно, и познато је да се та два круга додирују изнутра у Фојербаховој тачки троугла ABC. Стога (уз чињеницу да је коефицијент хомотетије позитиван), центар хомотетије је управо Фојербахова тачка. Одавде следи да се A_1K_a, B_1K_b, C_1K_c секу у Фојербаховој тачки троугла ABC, која припада уписаном кругу троугла ABC, чиме је тврдјење доказано.



Алтернативно решење. Нека је уписани круг троугла ABC јединична кружница у комплексној равни. Тада је $a = \frac{2b'c'}{b'+c'}$, $b = \frac{2a'c'}{a'+c'}$, $c = \frac{2a'b'}{a'+b'}$. Затим је

$$a_1 = \frac{b+c}{2} = \frac{a'^2b' + a'^2c' + 2a'b'c'}{(a'+b')(a'+c')}.$$

Вредност k_a налазимо из услова $\frac{k_a}{a} = \overline{\left(\frac{a'}{a}\right)}$, одакле је $k_a = \frac{1}{a'}\frac{a}{\overline{a}} = \frac{b'c'}{a'}$. Сада налазимо пресечну тачку z уписаног круга (одакле $|z| = 1$) и праве K_aA_1 (одакле $\frac{z-k_a}{a_1-k_a} = \overline{\left(\frac{z-k_a}{a_1-k_a}\right)}$). Други услов можемо трансформисати у облик

$$\overline{(a_1-k_a)}(z-k_a) = (\frac{1}{z} - \frac{1}{k_a})(a_1-k_a),$$

одакле (због $z \neq k_a$) следи $\overline{(a_1-k_a)} = -\frac{1}{zk_a}(a_1-k_a)$, па је

$$z = -\frac{1}{k_a}\frac{a_1-k_a}{\overline{(a_1-k_a)}} = -\frac{(a'^2-b'c')(a'b'+a'c'+b'c')}{(b'c'-a'^2)(a'+b'+c')} = \frac{a'b'+a'c'+b'c'}{a'+b'+c'}.$$

Како је наведени израз симетричан по a', b', c', аналогно се доказује да ће праве K_bB_1 и K_cC_1 сећи уписани круг у истој тачки, чиме је тврђење доказано.

6. Дати израз је симетричан, па се без губљења општости може претпоставити да је $x \geqslant y \geqslant z$. Тада је

$$x^{k+1}+y^k+z^k \leqslant y^{k+1}+z^k+x^k \leqslant z^{k+1}+x^k+y^k.$$

Заиста, довољно је доказати прву неједнакост, тј. да је $x^{k+1}+y^k \leqslant y^{k+1}+x^k$. Ова неједнакост је еквивалентна са $\left(\frac{y}{x}\right)^k \leqslant \frac{1-x}{1-y}$. Како је $y \leqslant x$, довољно је доказати да је $\frac{y}{x} \leqslant \frac{1-x}{1-y}$, што је еквивалентно тачној неједнакости $0 \leqslant x-x^2-y+y^2=(x-y)(1-x-y)=(x-y)z$. Применом неједнакости Чебишева на тројке $(x^{k+2},y^{k+2},z^{k+2})$ и $\left(\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k},\frac{1}{y^{k+1}+z^k+x^k},\frac{1}{z^{k+1}+x^k+y^k}\right)$ добија се

$$\sum_{cyc}\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k} \geqslant \frac{1}{3}\sum_{cyc}x^{k+2}\sum_{cyc}\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}=L.$$

Уколико се у L поново примени неједнакост Чебишева на тројке (x,y,z) и $(x^{k+1},y^{k+1},z^{k+1})$ добија се

$$L \geqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sum_{cyc}x\sum_{cyc}x^{k+1}\sum_{cyc}\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}=L'. \qquad (*)$$

Из неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског следи

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^{k+1}+y^k+z^k}\sum_{cyc}(x^{k+1}+y^k+z^k) \geqslant 9,$$

па је

$$L' \geqslant \frac{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}}{x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}+2(x^k+y^k+z^k)},$$

и самим тим довољно је доказати да је

$$3(x^{k+1}+y^{k+1}+z^{k+1}) \geqslant x^k+y^k+z^k.$$

Последња неједнакост се добија поновном применом неједнакости Чебишева на тројке (x,y,z) и (x^k,y^k,z^k).

Једнакост у свим примењеним неједнакостима важи ако и само ако је $x=y=z$, тј. ако и само ако је $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.