СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 02.04.2007.

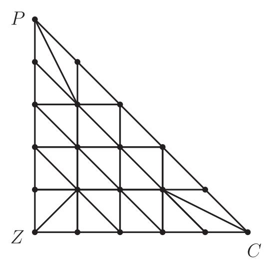
Први дан

1. Нека је D тачка на страници AC троугла ABC у коме је $AB < BC$ таква да је $AB = BD$. Круг уписан у $\triangle ABC$ додирује AB у K и AC у L, а J је центар уписаног круга троугла BCD. Доказати да KL полови дуж AJ.

2. Троугао $\triangle ZCP$ је подељен на 25 „малих“ троуглова (као на слици), а затим су сва темена тих троуглова обојена са три боје на следећи начин:

теме Z је обојено зеленом бојом, теме C црвеном, а теме P плавом;

свако од темена на дужи ZC обојено је или зеленом или црвеном бојом, свако од темена на дужи CP обојено је или црвеном или плавом бојом, а свако од темена на дужи ZP обојено је или зеленом или плавом бојом. Сва темена која се налазе у унутрашњости троугла обојена су без ограничења, једном од три боје.



Доказати да без обзира на начин бојења, бар један од 25 „малих“ троуглова има сва три темена различите боје.

3. Одредити све парове природних бројева (x, n) који су решења једначине

$$x^3 + 2x + 1 = 2^n.$$

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.

СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

такмичење ученика средњих школа из математике

Београд, 03.04.2007.

Други дан

4. Нека је k природан број. За сваку функцију $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, нека је низ функција $(f_m)_{m\geqslant 1}$ дефинисан са $f_1 = f$ и $f_{m+1} = f \circ f_m$ за $m \geqslant 1$. Функција f је k-*фина* уколико за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$f_k(n) = f(n)^k.$$

(а) За које k постоји *1-1* k-*фина* функција f?

(б) За које k постоји *на* k-*фина* фунција f?

5. Дат је неједнакокраки троугао ABC. Нека су AD, BE, CF симетрале углова овог троугла ($D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$). Нека су K_a, K_b, K_c тачке на уписаном кругу троугла ABC такве да су DK_a, EK_b, FK_c тангенте на уписани круг и да $K_a \notin BC$, $K_b \notin AC$, $K_c \notin AB$. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB. Доказати да се праве A_1K_a, B_1K_b, C_1K_c секу на уписаном кругу троугла ABC.

6. Нека је k природан број. Доказати да за позитивне реалне бројеве x, y, z чији је збир једнак 1, важи неједнакост

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1}+y^k+z^k} + \frac{y^{k+2}}{y^{k+1}+z^k+x^k} + \frac{z^{k+2}}{z^{k+1}+x^k+y^k} \geqslant \frac{1}{7}\,.$$

Када важи једнакост?

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 7 поена.