27. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 19. фебруар 2006. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) У троуглу ABC угао A износи 60°. Симетрала странице AB сече праву AC у тачки N. Симетрала странице AC сече праву AB у тачки M. Докажите да је CB=MN.

2. (3 поена) Таблица $n\times n$ попуњена је по правилу: у поља првог ступца уписане су 1, у поља другог ступца 2, …, у поља n-тог ступца n. Бројеви на дијагонали од левог горњег до десног доњег угла су обрисани. Докажите да је збир бројева на једној страни од те дијагонале тачно два пута већи од збира бројењва са друге стране дијагонале.

3. (4 поена) Дат је позитиван број a. Зна се да неједначина $1 < xa < 2$ има тачно 3 решења по x у скупу целих бројева. Колико решења x у скупу целих бројева може имати неједначина $2 < xa < 3$? Пронађите све могућности.

4. Ана, Бора и Вита седе за округлим столом и једу орахе. У почетку су сви ораси били код Ане. Она их подједнако дели Бори и Вити, а остатак, ако га има, она поједе. Затим се све понавља: сваки следећи (у смеру кретања казаљке на сату) дели орахе које има код себе подједнако суседима, а остатак, ако га има, поједе. Ораха има много (више од 3). Докажите:

а) (3 поена) да ће бар један орах бити поједен;

б) (3 поена) да неће бити поједени сви ораси.

5. Пеђа има n^3 белих коцкица $1\times1\times1$. Он жели да од њих сложи коцку $n\times n\times n$ која ће бити споља сасвим бела. Колики најмањи број страна коцкица треба Васа да обоји неком другом бојом да би онемогућио Пеђу да сложи коцку? Решите задатак ако је:

а) (2 поена) n=2;

б) (4 поена) n=3.

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 19. фебруар 2006. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. Имамо конвексан полиедар са 100 ивица. Сва његова темена смо одрезали равнима-ножевима (маказама) близу самих темена (тј. тако да се те равни-ножеви не секу унутар или на граници полиедра). Нађите код добијеног полиедра:

а) (1 поен) број темена;

б) (2 поена) број ивица.

2. (3 поена) Могу ли се наћи функције $p(x)$ и $q(x)$, такве да је $p(x)$ парна функција, а $p(q(x))$ непарна функција (која није идентички једнака 0)?

3. (4 поена) Дат је позитиван број a. Зна се да неједначина $10 < a^x < 100$ има тачно 5 решења по x у скупу природних бројева. Колико решења по x у скупу природних бројева може имати неједначина $100 < a^x < 1000$? Пронађите ссве могућности.

4. (5 поена) Нека ABCD тетивни четвороугао и AB=AD. На страници BC узета је тачка M, а на страници CD тачка N, тако да је угао MAN једнак половини угла BAD. Докажите да је MN=BM+ND.

5. Пеђа има n^3 белих коцкица $1\times1\times1$. Он жели да од њих сложи коцку $n\times n\times n$ која ће бити споља сасвим бела. Колики најмањи број страна коцкица мора Васа да обоји неком другом бојом да би онемогућио Пеђу да сложи коцку? Решите задатак ако је:

а) (3 поена) n=3;

б) (3 поена) n=1000.

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 26. фебруар 2006. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) На билијарском столу који има облик правоугаоника 2×1, у угловима и на средиштима већих страна распоређени су отвори (рупе). Који је најмањи број кугли које се могу распоредити у унутрашњости правоугаоника, тако да се свака рупа налази на истој линији са неким двема куглама? (Рупе и кугле сматрамо тачкама.)

2. (4 поена) Докажите да је могуће наћи 100 парова целих бројева, таквих да у десетичном запису сваког броја све цифре нису мање од 6, а да је производ бројева сваког пара, број чије све цифре нису мање од 6.

3. (5 поена) Дат је оштроугли троугао ABC. Над страницама AB и BC са спољашње стране конструисана су два једнка правоугаоника ABMN и LBCK, таква да је AB=LB. Докажите да се праве AL, CM и NK секу у једној тачки.

4. (5 поена) Постоји ли природан број n, такав да десетични запис броја 2^n почиње цифром 5, а десетични запис броја 5^n почиње цифром 2?

5. (6 поена) У таблици 2005×2006 распоређени су бројеви 0, 1 и 2 тако да збир бројева у свакој врсти и збир бројева у свакој колони буде дељив са 3. Који је највећи број јединица које могу бити у тој таблици?

6. (7 поена) Криволинијски многоугао је многоугао чије су странице лукови кружнице. Да ли постоје криволинијски многоугао P и тачка A на његовој граници, тако да свака права која пролази кроз тачку A дели обим многоугла P на два дела једнаке дужине?

7. Јура и Јаша имају по један примерак једне исте таблице 5×5 са квадратном мрежом, попуњене са 25 различитих бројева. Јура бира највећи број у таблици, затим прецртава и врсту и колону у којој се тај број налази, затим бира највећи од преосталих бројева, прецртава и врсту и колону у којој се он налази, итд. Јаша поступа аналогно, али он бира најмањи од бројева из таблице. Може ли се догодити да збир бројева које је изабрао Јаша буде:

а) (6 поена) већи од збира бројева које је изабрао Јура?

б) (2 поена) већи од збира било којих 5 бројева из дате таблице, али који задовољавају услов: никоја два од њих не припадају истој врсти нити истој колони?

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 26. фебруар 2006. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, а поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (4 поена) Дат је конвексан 100-угао. Докажите да је могуће уочити 50 тачака у унутрашњости тог многоугла, таквих да свако теме многоугла буде на правој која је одређена двема од уочених тачака.

2. (5 поена) Постоје ли цели позитивни бројеви n и k, такви да десетични запис броја 2^n почиње бројем 5^k, а десетични запис броја 5^n почиње бројем 2^k?

3. (5 поена) Дат је полином $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$. Докажите да сваки цео позитиван степен тог полинома има бар један негативан коефицијент.

4. (6 поена) У троуглу ABC повучена је бисектриса AA' угла A, на одсечку AA' изабрана је тачка X. Права BX сече AC у тачки B', а права CX сече AB у тачки C'. Дужи $A'B'$ и CC' секу се у тачки P, а дужи $A'C'$ и BB' секу се у тачки Q. Докажите да су углови PAC и QAB једнаки.

5. (6 поена) Докажите да је могуће наћи бесконачно много парова целих бројева, тако да у десетичном запису сваког од њих све цифре буду не мање од 7, а да производ бројева сваког пара такође буде број чије су све цифре не мање од 7.

6. На кружници се налази 12 скакаваца у различитим тачкама. Те тачке деле кружницу на 12 лукова. На дати знак сви скакавци истовремено скачу у смеру казаљке на сату, сваки из краја свог лука до средишта лука. Тако настаје нових 12 лукова и онда се све понавља. Може ли се бар један скакавац вратити у своју полазну тачку пошто је учинио

а) (4 поена) 12 скокова;

б) (3 поена) 13 скокова?

7. (8 поена) Мрав хода по затвореној маршрути по ивицама додекаедра, никад се не враћајући назад. Маршрута мрава пролази тачно два пута по свакој ивици. Докажите да ће неку ивицу мрав оба пута прећи у истом смеру. (**Напомена**: Додекаедар има 20 темена, 30 ивица и 12 једнаких страна у облику петоугла, а у сваком темену састичу се три стране)