27. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 16. октобар 2005. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена, поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) Дат је троугао ABC. Тачке M_1, M_2, M_3 су средишта страница AB, BC и AC, а тачке H_1, H_2 и H_3 су подножја висина на те исте странице. Докажите да дужи H_1M_2, H_2M_3 и H_3M_1 могу бити странице једног троугла.

2. (3 поена) У сваком темену коцке записан је по један број. Уместо сваког броја записујемо аритметичку средину бројева који стоје на три суседна темена (бројеве замењујемо истовремено). После 10 таквих операција у сваком темену појавиће се почетни број. Да ли су обавезно сви полазни бројеви били једнаки?

3. (4 поена) Јединична дуж подељена је на 11 дужи (одсечака) тако да дужина ни једне од њих није већа од a. За које вредности a можемо тврдити да се од било које три тако настале дужи може образовати троугао?

4. (4 поена) Једна шаховска фигура може да се помери на 8 или 9 поља хоризонтално или вертикално. Није дозвољено да на исто поље стане два пута. Који је највећи број поља на које таква шаховста фигура може да стане на табли 15×15? (Кретање може започети са ма којег поља табле.)

5. (5 поена) Међу 6 новчића налази се један дефектан (разликује се од осталих по тежини, али је његова тежина, као и тежина исправног новчића, непозната). Како са 3 мерења на теразијама са теговима (које показују укупну тежину новчића који су на њима) наћи дефектан новчић?

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Припремна варијанта, 16. октобар 2005. год.

10—11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена поени по деловима једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) Могу ли се два тачна куба сместити међу два суседна тачна квадрата? Другим речима, има ли решење у скупу целих бројева неједначина: $n^2 < a^3 < b^3 < (n+1)^2$?

2. (3 поена) Дата је дуж дужине $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. Може ли се само помоћу шестара и лењира (без поделака) конструисати дуж дужине 1.

3. (4 поена) Међу 6 новчића налази се један дефектан (разликује се од осталих по тежини, али је његова тежина, као и тежина исправног новчића, непозната). Како са 3 мерења на теразијама са теговима (које показују укупну тежину новчића који су на њима) наћи дефектан новчић?

4. Над страницама правоуглог троугла ABC са спољашње стране конструисани су квадрати са центрима D, E и F. Докажите да је однос површина троуглова DEF и ABC:

(2 поена) **а)** већи од 1;

(2 поена) **б)** није мањи од 2.

5. (5 поена) На равни се налазила коцка. Њу су преврнули неколико пута (преко ивице) тако да се коцка поново нашла на полазном месту с истом горњом страном. Да ли се при томе горња страна могла окренути за 90^0 у односу на свој почетни положај?

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 23. октобар 2005. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) *Палиндром* – то је природан број који се једнако чита слева на десно и сдесна на лево. (На пример: 1, 343, 2002 су палиндроми, а 2005 није.) Могу ли се наћи 2005 парова облика $(n, n+110)$, где су оба броја палиндроми?

2. (5 поена) Продужеци страница AB и CD конвексног четвороугла ABCD секу се у тачки K. Зна се да је AD=BC. Нека су M и N средишта страница AB и CD. Докажите да је троугао MNK тупоугли.

3. (6 поена) На сваком пољу шаховске табле у почетку се налази топ. Сваким потезом можемо уклонити са табле топа који туче непаран број топова. Који је највећи број топова које можемо уклонити са табле? ? (Топови туку један другог ако стоје на истој вертикали или хоризонтали и међу њима нема других топова.)

4. По ивици (рубу) многоугаоног стола шетају два мрава. Свака ивица стола дужа је од 1 m, а растојање међу мравима увек је 10 cm. У почетку су оба мрава на истој ивици стола.

а) (2 поена) Нека је сто конвексан. Могу ли мрави прећи све ивице стола тако да се у свакој тачки ивице нађе сваки од њих?

б) (4 поена) Нека сто није обавезно конвексан. Могу ли мрави прећи све ивице стола тако да на рубу нема тачака у којима се није нашао ни један мрав?

5. (7 поена) Наћи највећи природан број N за који једначина

$$99x+100y+101z=N$$

има јединствено решење у скупу природних бројева ($x, y, z \in N$).

6. (8 поена) Тетка Смиља је припремила 1000 теглица џема за свог сестрића Косту. Теглице нису обавезно једнаке, али се зна да у свакој има не више од 1/100 укупне количине џема . За доручак Коста једе исту количину џема из било којих 100 теглица. Докажите да Коста може за одређени број доручака појести сав џем.

27. ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло.

Основна варијанта, 23. oktobar 2005. год.

10–11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за делове једног задатка се сабирају)

---

1. (3 поена) За које n можемо наћи различите природне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такве да збир $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}$ буде цео број?

2. По ивици (рубу) многоугаоног стола шетају два мрава. Свака ивица стола дужа је од 1 m, а растојање међу мравима увек је 10 cm. У почетку су оба мрава на истој ивици стола.

а) (2 поена) Нека је сто конвексан. Могу ли мрави прећи све ивице стола тако да се у свакој тачки ивице нађе сваки од њих?

б) (4 поена) Нека сто није обавезно конвексан. Могу ли мрави прећи све ивице стола тако да на рубу нема тачака у којима се није нашао ни један мрав?

3. (5 поена) На сваком пољу шаховске табле у почетку се налази топ. Сваким потезом можемо уклонити са табле топа која туче непаран број топова. Који је највећи број топова које можемо уклонити са табле? (Топови туку један другог ако стоје на истој вертикали или хоризонтали и међу њима нема других топова.)

4. (6 поена) На кружници је распоређено неколико позитивних бројева од којих ни један није већи од 1. Доказати да је такву кружницу могуће поделити на три лука, тако да се збирови бројева на суседним луковима разликују за не више од 1. (Напомена: Ако на луку нема бројева, сматра се да је на њему збир једнак нули.)

5. (7 поена) У троуглу ABC дужи AA_1, BB_1 и CC_1 су бисектрисе. Зна се да се величине углова A, B и C односе као 4:2:1. Докаказати да је $A_1B_1=A_1C_1$.

6. (8 поена) На табли је могуће или написати две јединице, или обрисати ма која два већ написана једнака броја n и уместо њих написати бројеве $n+1$ и $n-1$. Колико најмање таквих операција треба извршити да би се добио број 2005? (У почетку је табла била чиста.)