23. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Агрос, Кипар – 29. април 2006.

1. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви. Доказати:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)} \geqslant \frac{3}{1+abc}.$$

(Грчка)

2. Дат је троугао ABC и права m која сече странице AB и AC у тачкама D и F, редом, и продужетак странице BC у тачки E тако да је C између B и E. Три праве паралелне са m кроз A, B и C секу по други пут круг описан око троугла ABC у тачкама A_1, B_1 и C_1, редом. Доказати да се праве A_1E, B_1F и C_1D секу у једној тачки. *(Грчка)*

3. Наћи све уређене тројке (m, n, p) позитивних рационалних бројева таквих да су бројеви

$$m+\frac{1}{np},\ n+\frac{1}{pm},\ p+\frac{1}{mn}$$

сви цели. *(Румунија)*

4. Нека је m природан број. Наћи све природне бројеве a за које је низ дефинисан са $a_0 = a$ и

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{ако је } a_n \text{ парно,} \\ a_n+m & \text{ако је } a_n \text{ непарно} \end{cases} \quad \text{за } n=0,1,2,\ldots$$

периодичан, са циклусом (сегментом који се периодично понавља) облика a_0, $a_1, \ldots, a_k$ за неко k. *(Бугарска)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

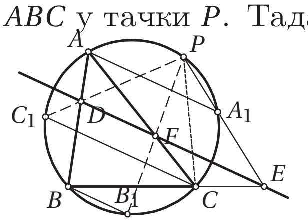
1. Сменама $abc = k^3$ и $a = \frac{ky}{x}$, $b = \frac{kz}{y}$, $c = \frac{kx}{z}$ за $k, x, y, z \geqslant 0$ тражена неједнакост се своди на $\frac{x}{ky+k^2z} + \frac{y}{kz+k^2x} + \frac{z}{kx+k^2y} \geqslant \frac{1}{k^3+1}$. По Коши-Шварцовој неједнакости је

$$\frac{x}{ky+k^2z} + \frac{y}{kz+k^2x} + \frac{z}{kx+k^2y} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{x(ky+k^2z)+y(kz+k^2x)+z(kx+k^2y)}$$
$$= \frac{(x+y+z)^2}{(k^2+k)(xy+yz+zx)} \geqslant \frac{3}{k^2+k} \geqslant \frac{3}{k^3+1}$$

јер је $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$ и $k^2+k \leqslant k^3+1$. Једнакост важи ако и само ако је $x = y = z$ и $k = 1$, тј. $x = y = z = 1$.

Друго решење. Множењем са $1+abc$, с обзиром на то да је $1 + \frac{1+abc}{a(1+b)} = \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b}$, тражена неједнакост постаје $\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{b(1+c)}{1+b} + \frac{1+b}{b(1+c)} + \frac{c(1+a)}{1+c} + \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{a(1+b)}{1+a} \geqslant 6$, а она одмах следи сабирањем неједнакости $\frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{a(1+b)}{1+a} \geqslant 2$ и аналогних.

2. Нека права A_1E поново сече описани круг троугла ABC у тачки P. Тада је $\sphericalangle EPC = \sphericalangle A_1PC = \sphericalangle A_1AC = \sphericalangle EFC$, па је четвороугао $EPFC$ тетиван. Сада је $\sphericalangle FPC = \sphericalangle FEC = \sphericalangle B_1BC = \sphericalangle B_1PC$, тј. тачка P лежи на правој B_1F. Аналогно, $P \in C_1D$.



3. Означимо $a = mnp$. Бројеви $\frac{a+1}{mn}, \frac{a+1}{np}$ и $\frac{a+1}{pm}$ су цели, па је цео и њихов производ $\frac{(a+1)^3}{a^2} = k$, дакле a је нула полинома $x^3 + (3-k)x^2 + 3x + 1 = 0$. Одавде следи да ако је $a = \frac{q}{r}$ $(q, r \in \mathbb{N}, (q,r) = 1)$, онда $q, r \mid 1$, дакле $a = 1$.

Према томе, $\frac{a+1}{mn} = 2p$ и аналогно $2m$ и $2n$ су цели бројеви, па како је $2m \cdot 2n \cdot 2p = 8$, једина решења (m, n, p) су тројке $(1,1,1)$, $(2,1,\frac{1}{2})$ и $(4,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ са пермутацијама.

4. Ако је m парно, низ није периодичан. Заиста, за $a = 2^r k$ $(2 \nmid k)$ имамо $a_r = k$ и $a_{r+i} = k + im$ за $i \geqslant 0$.

Нека је m непарно и нека је a_k најмањи члан низа. Јасно је да $2 \nmid a_k$, па је $a_{k+1} = a_k + m$ и $a_{k+2} = \frac{a_k+m}{2} \geqslant a_k$, дакле $a_k \leqslant m$. Једноставном индукцијом се показује да након a_k нема непарних чланова низа већих од m и парних већих од $2m$. Према томе, ако је низ (a_n) чисто периодичан, онда је $a \in S = \{1, 2, \dots, m, m+1, m+3, \dots, 2m\}$.

С друге стране, за $a \in S$ сви чланови низа су у S, па је низ периодичан почев од неке тачке. Шта више, ако је $a_k = a_l$ за $k < l$, лако се види да мора бити и $a_{k-1} = a_{l-1}$ итд, па је низ периодичан почев од a_0.