23. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Агрос, Кипар – 29. април 2006.

1. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви. Доказати:

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+a)} \geq \frac{3}{1+abc}\,.$$

(Грчка)

2. Дат је троугао ABC и права m која сече странице AB и AC у тачкама D и F, редом, и продужетак странице BC у тачки E тако да је C између B и E. Три праве паралелне са m кроз A, B и C секу по други пут кружницу описану око троугла ABC у тачкама A_1, B_1 и C_1, редом. Доказати да се праве A_1E, B_1F и C_1D секу у једној тачки. *(Грчка)*

3. Наћи све уређене тројке (m, n, p) позитивних рационалних бројева таквих да су бројеви

$$m + \frac{1}{np}, \;\; n + \frac{1}{pm}, \;\; p + \frac{1}{mn}$$

сви цели. *(Румунија)*

4. Нека је m природан број. Наћи све природне бројеве a за које је низ дефинисан са $a_0 = a$ и

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{ако је } a_n \text{ парно,} \\ a_n + m & \text{ако је } a_n \text{ непарно} \end{cases} \quad \text{за } n = 0, 1, 2, \ldots$$

периодичан, са циклусом (сегментом који се периодично понавља) облика $a_0, a_1, \ldots, a_k$ за неко k. *(Бугарска)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.