

**КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ
СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ**

Будва, 17.04.2005.

1. Дат је низ $x_1 = 1, x_2 = 4$ и $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ за $n \geq 1$. Наћи све природне бројеве m такве да је број $3x_n^2 + m$ потпун квадрат за сваки природан број n .
2. Колико има 100-цифрених природних бројева у чијем се декадном запису појављују само непарне цифре, таквих да је разлика сваке две суседне цифре једнака 2?
3. (а) Доказати да постоји природан број који је дељив са 2005 и чији је збир цифара једнак 2.
(б) Нека је x_n природан број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до n (на пример, важи $x_1 = 1, x_2 = 12, x_3 = 123, \dots, x_{13} = 12345678910111213, \dots$). Доказати да у низу x_1, x_2, \dots постоји бесконачно много чланова који су дељиви са 2005.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

**КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ
СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ ЗА ММО**

Београд, 31.05.2005. – први дан

4. Нека је α оштар угао, такав да важи $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Доказати да α није облика $r \cdot \pi$, где је r рационалан број.
5. Дат је конвексан угао xOy и тачка M унутар њега. Доказати да постоји единствена тачка P у равни угла таква да, за сваку праву кроз M која сече краке угла (или продужетке кракова) у неким тачкама X и Y , угао $\angle XPY$ није туп.
6. Наћи све полиноме са реалним коефицијентима, такве да за свако реално x важи $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

**КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ
СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ ЗА ММО**

Београд, 01.06.2005. – други дан

7. Ако је T тежиште троугла ABC , доказати да важи

$$\frac{1}{\sin \angle TAC} + \frac{1}{\sin \angle TBC} \geq 4.$$

8. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви за које је $abc = 1$. Доказати да важи

$$\frac{a}{a^2 + 2} + \frac{b}{b^2 + 2} + \frac{c}{c^2 + 2} \leq 1.$$

9. За n поља таблице $n \times n$ кажемо да су *разбацана* ако никоја два нису из исте врсте или исте колоне. У свако поље те таблице уписан је природан број тако да је збир бројева у било којих n разбацаних поља исти и да ни једна врста или колона не садржи два једнака броја. Показало се да се бројеви дуж главне дијагонале налазе у растућем поретку и да је њихов производ најмањи од свих производа од по n разбацаних бројева.
Доказати да се разбацани бројеви чији је производ највећи налазе дуж споредне дијагонале.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

РЕШЕЊА

1. Карактеристични полином датог рекурентног низа је $x^2 - 4x + 1$, чије су нуле $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Према томе, низ (x_n) је облика $x_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n$ за неке константе A и B ; лако се налази да је $A = -B = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, тј.

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n \right).$$

Сада је $3x_n^2 = \frac{1}{4} ((2 + \sqrt{3})^{2n} - 2 + (2 - \sqrt{3})^{2n})$, па је

$$3x_n^2 + 1 = y_n^2 \quad \text{за} \quad y_n = \frac{1}{2} \left((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right).$$

Приметимо да је број y_n цео. Дакле, $m = 1$ задовољава услов задатка.

Претпоставимо да постоји $m \neq 1$ које такође задовољава услов задатка. Тада је $3x_n^2 + m = y_n^2 + (m-1) = z_n^2$ ($z_n \geq 0$) потпун квадрат за све n , дакле $m-1 = (z_n - y_n)(z_n + y_n)$ има бесконачно много делилаца, што је немогуће. Следи да је $m = 1$ једино решење.

2. Означимо са $x_k(n)$ редом број n -тоцифреног бројева чија је прва цифра k и сваке две суседне цифре се разликују за 2. Сваки такав број се добија додавањем цифре k слева ($n-1$)-цифреном броју са првом цифром $k-2$ или $k+2$ (ако су то заиста цифре), па имамо $x_k(n) = x_{k-2}(n-1) + x_{k+2}(n-1)$, при чему дефинишемо $x_{-1}(n) = x_{11}(n) = 0$ и $x_1(1) = x_3(1) = x_5(1) = x_7(1) = x_9(1) = 1$. Индукцијом се лако показује $x_1(n) = x_9(n)$ и $x_3(n) = x_7(n)$ за све n . Означимо $a_n = x_1(n)$, $b_n = x_3(n)$ и $c_n = x_5(n)$. По претходном имамо

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1 \quad \text{и} \quad a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = a_n + c_n, \quad c_{n+1} = 2b_n.$$

Одавде је $a_{n+1} = b_n = a_{n-1} + 2b_{n-2} = 3a_{n-1}$ и слично $b_{n+1} = 3b_{n-1}$ и $c_{n+1} = 3c_{n-1}$. Сада из $a_2 = 1$ и $b_2 = c_2 = 2$ следи $a_{100} = 3^{49}$ и $b_{100} = c_{100} = 2 \cdot 3^{49}$.

Тражених бројева има укупно $2a_{100} + 2b_{100} + c_{100} = 8 \cdot 3^{49}$.

3. (а) Довољно је доказати да $401 \mid 10^n + 1$ за неко n , јер тада $2005 \mid 10^{n+1} + 10$. Имамо $10^5 \equiv -250 \pmod{401}$, $10^{10} \equiv -56$, $10^{20} \equiv -72$, $10^{25} \equiv -45$, $10^{50} \equiv 20$ и $10^{100} \equiv -1 \pmod{401}$, па је довољно узети $n = 100$.

(б) За произвољно цело $m \geq 0$ посматрајмо $N = 10^{200m+99}$; по претходном је $10N \equiv -1 \pmod{401}$. За $N \leq n < 10N - 2$ важи $x_{n+2} = x_n(n+1)(n+2) = 100N^2x_n + 10N(n+1) + (n+2) \equiv x_n - (n+1) + (n+2) = x_n + 1 \pmod{401}$, дакле $x_{N+2k} \equiv x_N + k \pmod{401}$ за $0 \leq k < N$. Постоји k ($0 \leq k < 2005$) такво да је $k \equiv -x_n \pmod{401}$ и $k \equiv 0 \pmod{5}$, и тада по претходном важи $x_{N+2k} \equiv 0 \pmod{2005}$. Овако смо за свако m добили n са $10^{200m+99} \leq m < 10^{200m+100}$ такво да $2005 \mid x_n$.

4. Довољно је показати индукцијом по n да је $\operatorname{tg} n\alpha$ може приказати у облику

$\frac{p_n}{q_n}$, где су $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ такви да важи $p_n \equiv 3$ и $q_n \equiv 4 \pmod{5}$ - одавде следи да је $\operatorname{tg} n\alpha \neq 0$, тј. $n\alpha \neq m\pi$, где је $m \in \mathbb{Z}$.

За $n = 1$ је $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, па тврђење важи. Нека је тврђење тачно за неки природан број n , тј. постоје p_n, q_n са горе поменутим својствима. Тада је $\operatorname{tg}(n+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4p_n + 3q_n}{4q_n - 3p_n}$. Ако је $p_{n+1} = 2(4p_n + 3q_n)$, $q_{n+1} = 2(4q_n - 3p_n)$, следи $p_{n+1}, q_{n+1} \in \mathbb{Z}$ и $p_{n+1} = 2(4p_n + 3q_n) \equiv 2(4 \cdot 3 + 3 \cdot 4) \equiv 3 \pmod{5}$ и $q_{n+1} = 2(4q_n - 3p_n) \equiv 2(4 \cdot 4 - 3 \cdot 3) \equiv 4 \pmod{5}$, чиме је доказ индукцијом завршен.

5. Нека су A и B тачке на крацима x и y редом такве да је $MA \parallel y$ и $MB \parallel x$.

Нека је $X \in x$ и $Y \in y$. Ако тачка X тежи тачки A са стране тачке O , тачка Y иде у бесконачност дуж полуправе комплементне краку y , па угао $\angle XPY$ тежи углу $\angle MAP$. Ако се X приближава A с друге стране, тачка Y иде у бесконачност дуж крака y , па угао $\angle XPY$ тежи углу $180^\circ - \angle MAP$. Према томе, ниједан од угла $\angle MAP$ и $180^\circ - \angle MAP$ не сме бити туп, одакле следи $\angle MAP = 90^\circ$. Аналогно је $\angle MBP = 90^\circ$. Даље, тачка P мора бити ортоцентар троугла OAB .

С друге стране, ако је P ортоцентар троугла OAB , по Талесовој теореми је $\frac{AX}{AM} = \frac{BM}{BY}$, тј. $AX \cdot BY = AO \cdot BO$, па имамо

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PY} &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AX}) \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BY}) \\ &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{AX} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BY} \\ &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BO} \\ &= (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AO}) \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BO}) = PO^2 \geq 0,\end{aligned}$$

тј. заиста је $\angle XPY \leq 90^\circ$.

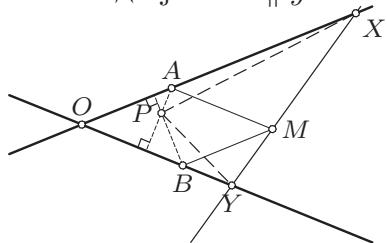
6. Из $P(x)^2 = P(-x)^2 = P(x^2 + 1) - 1$ следи да је полином $P(-x)$ идентички једнак $P(x)$ или $-P(x)$.

Ако је $P(x) = -P(-x)$ за све x , заменом $x = 0$ добијамо $P(0) = 0$. Дефинишисмо низ $x_0 = 0$ и $x_{n+1} = x_n^2 + 1$. Индукцијом лако следи $P(x_n) = x_n$ за све n , па како је низ (x_n) растући, следи да је $P(x) = x$ за бесконачно много бројева x , дакле $P(x) \equiv x$, што очигледно задовољава дату једнакост.

Претпоставимо сада да је $P(x) = P(-x)$. Нека је $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Тада је полином $P(x) - P(-x) = 2(a_1x + a_3x^3 + \dots)$ идентички нула, па је $a_1 = a_3 = \dots = 0$, тј. $P(x)$ је полином по x^2 . Следи да постоји полином Q такав да је $P(x) = Q(x^2 + 1)$.

Тада је $Q((x^2 + 1)^2 + 1) = Q(x^2 + 1)^2 - 1$, што се сменом $x^2 + 1 = y$ своди на $Q(y^2 + 1) = Q(y)^2 + 1$, тј. Q задовољава исту полиномску једначину као P , али је мањег степена.

Настављајући овај поступак закључујемо да су сва решења полиноми x , $T(x)$, $T(T(x))$, $T(T(T(x)))$, ..., где је $T(x) = x^2 + 1$.



7. Нека је P површина троугла ABC , a, b, c редом странице троугла наспрам A, B, C , а t_a, t_b, t_c одговарајуће тежишне дужи.

Ако је A_1 средиште дужи BC , имамо $P = 2P_{A_1AC} = bt_a \sin \angle TAC$. Аналогично је $P = at_b \sin \angle TBC$, па се тражена неједнакост своди на $at_b + bt_a \geq 4P$. Међутим, како мањој страници одговара већа тежишна дуж, заиста важи $at_b + bt_a \geq at_a + bt_b \geq 2P + 2P = 4P$.

8. Како је $a^2 + 2 \geq 2a + 1$ итд, довољно је показати да важи $L = \frac{a}{2a+1} + \frac{b}{2b+1} + \frac{c}{2c+1} \leq 1$. То је с друге стране еквивалентно са

$$3 - 2L = \frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2b+1} + \frac{1}{2c+1} \geq 1. \quad (1)$$

Сменом $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ сводимо (1) на $\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geq 1$. Међутим, ова неједнакост одмах следи из Коши-Шварцове неједнакости:

$$\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \geq \frac{(y+z+x)^2}{y(2x+y) + z(2y+z) + x(2z+x)} = 1.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c = 1$.

9. Нека је x_{ij} број у i -тој врсти и j -тој колони. По услову задатка, ако је $i \neq k$ и $j \neq l$, важи $x_{ij} + x_{kl} = x_{il} + x_{kj}$, тј. $x_{ij} - x_{kj} = x_{il} - x_{kl}$. За $k = l = 1$ добијамо $x_{ij} = x_{i1} + x_{1j} - x_{11}$. Ако сада означимо $a_i = x_{i1}$ и $b_j = x_{1j} - x_{11}$, имамо $x_{ij} = a_i + b_j$.

Даље, из услова минималности производа по главној дијагонали следи $x_{ii}x_{jj} \leq x_{ij}x_{ji}$, тј. $(a_i + b_i)(a_j + b_j) \leq (a_i + b_j)(a_j + b_i)$, што је еквивалентно са $(a_j - a_i)(b_j - b_i) \geq 0$, дакле $a_j \geq a_i \Leftrightarrow b_j \geq b_i$. Притом знамо да је $x_{ii} < x_{jj}$ за $i < j$, па закључујемо да је $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ и $b_1 < b_2 < \dots < b_n$.

Нека су сада $x_{1\sigma(1)}, \dots, x_{n\sigma(n)}$ разбацана поља са највећим производом, где је σ пермутација скупа $\{1, 2, \dots, n\}$. Тада је $x_{i\sigma(i)}x_{j\sigma(j)} \geq x_{i\sigma(j)}x_{j\sigma(i)}$ за $i < j$, тј. $(a_i + b_{\sigma(i)})(a_j + b_{\sigma(j)}) \geq (a_i + b_{\sigma(j)})(a_j + b_{\sigma(i)})$, што је еквивалентно са $(a_j - a_i)(b_{\sigma(j)} - b_{\sigma(i)}) \leq 0$. Како је $a_j > a_i$, имамо $b_{\sigma(j)} < b_{\sigma(i)}$, тј. $\sigma(j) < \sigma(i)$. Према томе, низ $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ је опадајући, па мора бити $\sigma(i) = n + 1 - i$, одакле следи тврђење.