КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ

Будва, 17.04.2005.

1. Дат је низ $x_1 = 1, x_2 = 4$ и $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ за $n \geqslant 1$. Наћи све природне бројеве m такве да је број $3x_n^2 + m$ потпун квадрат за сваки природан број n.

2. Колико има 100–цифрених природних бројева у чијем се декадном запису појављују само непарне цифре, таквих да је разлика сваке две суседне цифре једнака 2?

3. (а) Доказати да постоји природан број који је дељив са 2005 и чији је збир цифара једнак 2. [5 поена]

(б) Нека је x_n природан број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до n (на пример, важи $x_1 = 1$, $x_2 = 12$, $x_3 = 123, \ldots$, $x_{13} = 12345678910111213, \ldots$). Доказати да у низу $x_1, x_2, \ldots$ постоји бесконачно много чланова који су дељиви са 2005. [20 поена]

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ ЗА ММО

Београд, 31.05.2005. – први дан

1. Нека је α оштар угао, такав да важи $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Доказати да α није облика $r \cdot \pi$, где је r рационалан број.

2. Дат је конвексан угао xOy и тачка M унутар њега. Доказати да постоји јединствена тачка P у равни угла таква да, за сваку праву кроз M која сече краке угла (или продужетке кракова) у неким тачкама X и Y, угао $\sphericalangle XPY$ није туп.

3. Наћи све полиноме са реалним коефицијентима, такве да за свако реално x важи $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ ЗА ММО

Београд, 01.06.2005. – други дан

4. Ако је T тежиште троугла ABC, доказати да важи

$$\frac{1}{\sin\sphericalangle TAC} + \frac{1}{\sin\sphericalangle TBC} \geqslant 4.$$

5. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви за које је $abc = 1$. Доказати да важи

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leqslant 1.$$

6. За n поља таблице $n \times n$ кажемо да су *разбацана* ако никоја два нису из исте врсте или исте колоне. У свако поље те таблице уписан је природан број тако да је збир бројева у било којих n разбацаних поља исти и да ни једна врста или колона не садржи два једнака броја. Показало се да се бројеви дуж главне дијагонале налазе у растућем поретку и да је њихов производ најмањи од свих производа од по n разбацаних бројева.

Доказати да се разбацани бројеви чији је производ највећи налазе дуж споредне дијагонале.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.