# ПРВИ МАТЕМАТИЧКИ ДУНАВСКИ КУП

**Калараши, Румунија – 10. децембар 2005.**

**1.** Доказати да једначина

$$4x^3 - 3x + 1 = 2y^2$$

има бар 31 решење, такво да су $x$ и $y$ природни бројеви и $x \leqslant 2005$.

**2.** Доказати да је збир

$$S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} \cdot 2005 + \binom{n}{5} \cdot 2005^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} \cdot 2005^k$$

дељив са $2^{n-1}$ за сваки природан број $n$.

**3.** Из тачке $A$ изван кружнице $\mathscr{C}$ са центром $O$ конструисане су тангенте $AS$ и $AT$ на ту кружницу ($S, T \in \mathscr{C}$). На кружници $\mathscr{C}$ је изабрана тачка $M$ различита од $S$ и $T$. Права $MA$ сече нормалу из $S$ на $MO$ у тачки $P$. Доказати да тачка симетрична тачки $S$ у односу на $P$ припада правој $MT$.

**4.** Дата је табла са $2(2^n - 1)$ редова и $k$ колона ($k$ и $n$ су природни бројеви). Бојење поља те табле са две боје је *допустиво* ако за сваке две колоне важи:

- поља у те две колоне која припадају истом реду су исте боје за мање од $2^n - 1$ редова.

За дато $n$, одредити максималну вредност $k$ за коју постоји допустиво бојење.

*Сваки задатак вреди 10 поена.*
*Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.*

## РЕШЕЊА

**1.** Ако је $y^2 = \frac{1}{2}(4x^3 - 3x + 1) = \frac{1}{2}(x+1)(2x-1)^2$, број $\frac{x+1}{2}$ мора бити квадрат природног броја. Пошто је $\frac{x+1}{2} \leqslant 1003$, оваквих вредности $x$ има $[\sqrt{1003}] = 31$.
Сва целобројна решења једначине су $(x, y) = (2t^2 - 1, 4t^3 - 3t)$ за $t \in \mathbb{Z}$.

**2.** Означимо $T_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} \cdot 2005^k$. Видимо да је $T_n \pm S_n\sqrt{2005} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \sqrt{2005}^i = (1 \pm \sqrt{2005})^n$, па је

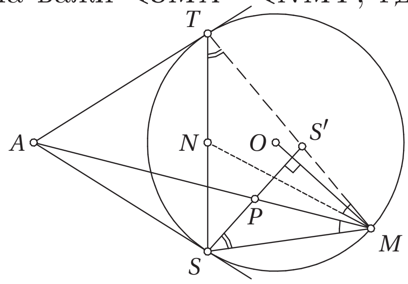
$$s_n = \frac{S_n}{2^{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2005}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{2005}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{2005}}{2} \right)^n \right).$$

Бројеви $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{2005}}{2}$ задовољавају једначину $x^2 - x - 501 = 0$, одакле закључујемо да за свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи

$$s_n - s_{n-1} - 501 s_{n-2} = 0.$$

Како су $s_0 = 0$ и $s_1 = 1$ цели бројеви, индукцијом следи да је $s_n$ цео број за све $n$.

**3.** Знамо да је $MA$ симедијана у троуглу $MTS$, па важи $\sphericalangle SMA = \sphericalangle NMT$, где је $N$ средиште дужи $ST$. Такође је $\sphericalangle MSP = 90^\circ - \sphericalangle SMO = \sphericalangle MTS = \sphericalangle MTN$, па имамо $\triangle MSP \sim \triangle MTN$. Према томе, ако је $S'$ тачка симетрична тачки $S$ у односу на $P$, важи и $\triangle MSS' \sim \triangle MTS$, па је $\sphericalangle SMS' = \sphericalangle TMS$, тј. $S'$ је на правој $MT$.




**4.** Боје означавамо са 0 и 1. По услову задатка, две колоне се поклапају у највише $2^n - 2$ поља. Дакле, укупан број $N$ парова поља која леже у истом реду и имају исту боју није већи од $(2^n-2)\binom{k}{2}$. С друге стране, ако у $i$-том реду $(1 \leqslant i \leqslant 2(2^n-1))$ има $x_i$ нула и $k - x_i$ јединица, у њему има $\binom{x_i}{2} + \binom{k-x_i}{2} = \frac{(2x_i-k)^2 + k(k-2)}{4} \geqslant \frac{k(k-2)}{4}$ оваквих парова. Следи да је $2(2^n-1) \cdot \frac{k(k-2)}{4} \leqslant N \leqslant (2^n-2)\binom{k}{2}$, што нам даје $k \leqslant 2^n$.

Пример таблице $T_n$ димензија $2(2^n-1) \times k$ за $k = 2^n$ са траженим својством конструишемо индуктивно. Таблицу $T_1$ лако налазимо. Са $\overline{T}_n$ означавамо таблицу која се добија из $T_n$ променом боје сваког поља (црно у бело и обрнуто). Ако имамо таблицу $T_n$, онда таблицу $T_{n+1}$ можемо да конструишемо склапањем три таблице $T_n$ и једне $\overline{T}_n$ као на слици и додавањем две нове врсте. Заиста, сваке две колоне из леве половине таблице, као и сваке две из десне, разликују се на бар $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ места, док се сваке две из различитих половина разликују на бар $2(2^n-1) + 2 = 2^{n+1}$ места.

$$T_{n+1} = \begin{bmatrix} T_n & T_n \\ T_n & \overline{T}_n \\ 00\ldots0 & 11\ldots1 \\ 00\ldots0 & 11\ldots1 \end{bmatrix}; \qquad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \cdots$$