ПРВИ МАТЕМАТИЧКИ ДУНАВСКИ КУП

Калараши, Румунија, 10. децембар 2005.

1. Доказати да једначина

$$4x^3 - 3x + 1 = 2y^2$$

има бар 31 решење, такво да су x и y природни бројеви и $x \leqslant 2005$.

2. Доказати да је збир

$$S_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} \cdot 2005 + \binom{n}{5} \cdot 2005^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2k+1} \cdot 2005^k$$

дељив са 2^{n-1}, за сваки природан број n.

3. Из тачке A изван кружнице $\mathcal{C}$ са центром O конструисане су тангенте AS и AT на ту кружницу, $S, T \in \mathcal{C}$. На кружници $\mathcal{C}$ је изабрана тачка M, различита од S и T. Права MA сече нормалу из S на MO у тачки P. Доказати да тачка, симетрична тачки S у односу на P, припада правој MT.

4. Дата је табла са $2(2^n - 1)$ редова и k колона (k, n су природни бројеви). Бојење поља те табле са две боје је *допустиво* ако за сваке две колоне важи: поља у те две колоне која припадају истом реду су исте боје за мање од $2^n - 1$ редова.
За дато n, одредити максималну вредност k за коју постоји допустиво бојење.

Време за рад $4\frac{1}{2}$ сата.