22. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Јаши, Румунија – 6. мај 2005.

1. Круг уписан у троугао ABC додирује AB у D и AC у E. Нека симетрале углова код темена C и B редом секу праву DE у тачкама X и Y, и нека је Z средиште странице BC. Доказати да је троугао XYZ једнакостраничан ако и само ако је $\sphericalangle A = 60^\circ$. *(Бугарска)*

2. Наћи све просте бројеве p за које је $p^2 - p + 1$ потпун куб. *(Албанија)*

3. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви, доказати неједнакост

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c + \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

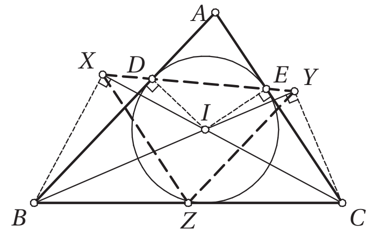
Када важи једнакост? *(Србија и Црна Гора)*

4. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. Нека је S подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који не садржи два узајамно проста елемента, нити два елемента од којих један дели други. Колико највише елемената може имати скуп S? *(Румунија)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Нека је I центар уписаног круга. Како је $\sphericalangle BIX = \frac{1}{2}(\sphericalangle B + \sphericalangle C) = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle A = \sphericalangle ADX$, тачке B, I, X, D су на истом кругу. Следи да је $\sphericalangle BXI = \sphericalangle BDI = 90^\circ$, па је троугао BCX правоугли и одатле $ZX = ZB$ и $\sphericalangle ZXC = \sphericalangle ZCX = \sphericalangle XCA$, тј. $ZX \parallel AC$. Аналогно је $ZY = ZB$ и $ZY \parallel AB$. Следи да је $ZX = ZY$ и $\sphericalangle XZY = \sphericalangle A$, одакле следи тврђење.



2. Једнакост $p^2 - p + 1 = b^3$ можемо да запишемо као $p(p-1) = (b-1)(b^2+b+1)$. Како је $b < p$, следи да $p \mid b^2+b+1$, тј. $b^2+b+1 = kp$ и $p-1 = k(b-1)$ за неки цео број $k > 1$; шта више, $k \geqslant 3$ јер је b^2+b+1 непарно. Сада је $p = kb - k + 1$ и

$$b^2 + b + 1 - kp = b^2 - (k^2-1)b + (k^2 - k + 1) = 0, \tag{1}$$

што је квадратна једначина по b. Њена дискриминанта $D = (k^2-1)^2 - 4(k^2-k+1) = k^4 - 6k^2 + 4k - 3$ мора бити потпун квадрат, па како је $(k^2-3)^2 \leqslant D < (k^2-2)^2$, мора бити $D = (k^2-3)^2$, што нам даје $k = 3$. Сада из (1) добијамо $b = 7$ и $p = 19$, што је једино решење.

3. Како је $\frac{a^2}{b} = 2a - b + \frac{(a-b)^2}{b}$, $\frac{b^2}{c} = 2b - c + \frac{(b-c)^2}{c}$ и $\frac{c^2}{a} = 2c - a + \frac{(c-a)^2}{a}$, тражена неједнакост се своди на

$$\frac{|a-b|^2}{b} + \frac{|b-c|^2}{c} + \frac{|c-a|^2}{a} \geqslant \frac{4|a-b|^2}{a+b+c}.$$

Ова неједнакост одмах следи из Коши-Шварцове: $(a+b+c)\left(\frac{|a-b|^2}{b} + \frac{|b-c|^2}{c} + \frac{|c-a|^2}{a}\right) \geqslant (|a-b| + |b-c| + |c-a|)^2 \geqslant (2|a-b|)^2$ јер је $|b-c| + |c-a| \geqslant |a-b|$.

Једнакост важи ако и само ако је $|a-b| = |b-c| + |c-a|$ и $|a-b| = kb$, $|b-c| = kc$, $|c-a| = ka$ за неко k. Ако је $k \neq 0$, из ових релација следи $b = c + a$, па имамо $a = kc = k^2 b$ и $|\frac{1}{k} - 1|a = |c-a| = ka$ и лако добијамо $k = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ако је $k = 0$, онда је $a = b = c$. Дакле, једнакост се достиже ако је $a = b = c$ или $a : b : c = \phi^2 : 1 : \phi$.

4. За свако $x \in S$ постоји јединствено $k_x \in \mathbb{N}_0$ такво да је $\frac{n}{2} < 2^{k_x} x \leqslant n$. Означимо $f(x) = 2^{k_x} x$. Пресликавање f је инјективно: заиста, ако за $x, y \in S$ важи $f(x) = f(y)$, онда $x \mid y$ или $y \mid x$, па је по услову задатка $x = y$. Према томе, скуп $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$ је исте кардиналности као скуп S. Притом $f(S)$ не садржи два узастопна броја (јер су они узајамно прости), па је $|f(S)| \leqslant \left[\frac{n - [\frac{n}{2}] + 1}{2}\right] = [\frac{n+2}{4}]$.

С друге стране, скуп $S = \{2i \mid \frac{n}{4} < i \leqslant \frac{n}{2}\}$ има тачно $[\frac{n+2}{4}]$ елемената и задовољава услове задатка. Према томе, одговор је $[\frac{n+2}{4}]$.