1-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2005 год
младшая лига

Задача №1. В прямоугольной таблице 9×9 отмечены 40 клеток. Горизонтальный или вертикальный ряд из 9 клеток называется *хорошим*, если в нем отмеченных клеток больше, чем не отмеченных. Какое наибольшее суммарное количество хороших (горизонтальных и вертикальных) рядов может иметь данная таблица?

Задача №2. Даны целые числа m, n такие, что $0 \leq m \leq 2n$. Докажите, что число $2^{2n+2} + 2^{m+2} + 1$ является полным квадратом тогда и только тогда, когда $m = n$.

Задача №3. На плоскости дано множество A из $2n$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что для любых двух различных точек $a, b \in A$ существует прямая, разбивающая A на два подмножества по n элементов и такая, что a и b лежат по разные стороны от этой прямой.

Задача №4. Для любых положительных действительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} \geq 1.$$

Задача №5. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке D, а точка M - середина этой стороны. Докажите, что точка M, центр вписанной окружности и середина отрезка CD лежат на одной прямой.

Задача №6. Найдите все простые числа p, q, не превошодящие 2005 и такие, что $p^2 + 4$ делится на q, а $q^2 + 4$ делится на p.

1-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2005 год
старшая лига

Задача №1. Докажите, что уравнение $x^5 + 31 = y^2$ не имеет решения в целых числах.

Задача №2. Дано действительное число r такое, что для некоторой последовательности $\{a_n\}$ положительных действительных чисел неравенство

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{m+1} \leq ra_m$$

выполняется для всех натуральных чисел m. Докажите, что $r \geq 4$.

Задача №3. Пусть $SABC$ - правильная треугольная пирамида, т.е. $SA = SB = SC$ и $AB = BC = AC$. Найдите геометрическое место точек D $(D \neq S)$ пространства, удовлетворяющих уравнению

$$|\cos\delta_A - 2\cos\delta_B - 2\cos\delta_C| = 3,$$

где угол $\delta_X = \angle XSD$ для каждого $X \in \{A, B, C\}$.

Задача №4. Точка X внутри выпуклого четырехугольника называется *наблюдаемой* из стороны YZ этого четырехугольника, если основание перпендикуляра из X на прямую YZ принадлежит замкнутому отрезку $[YZ]$. Точка внутри выпуклого четырехугольника называется *k-точкой*, если она наблюдаема в точности из k сторон четырехугольника (например, каждая точка внутри квадрата является 4-точкой). Докажите, что если внутри выпуклого четырехугольника существует 1-точка, то там существует и k-точка для каждого $k \in \{2, 3, 4\}$.

Задача №5. Для любых положительных действительных чисел a, b, c, d докажите неравенство

$$\frac{c}{a+2b} + \frac{d}{b+2c} + \frac{a}{c+2d} + \frac{b}{d+2a} \geq \frac{4}{3}.$$

Задача №6. Найдите все простые числа p, q, не превошодящие 2005 и такие, что $p^2 + 8$ делится на q, а $q^2 + 8$ делится на p.

2-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2006 год

Задача №1. Найдите все натуральные числа n такие, что $n = \varphi(n) + 402$, где $\varphi(n)$ - функция Эйлера (известно, что если $p_1, \ldots, p_k$ - все различные простые делители натурального числа n, то $\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$; кроме того, $\varphi(1) = 1$).

Задача №2. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки K и L соответственно, так, что $BK = CL$. Пусть P - точка пересечения отрезков BL и CK, а M - точка внутри отрезка AC такая, что прямая MP параллельна биссектрисе угла $\angle BAC$. Докажите, что $CM = AB$.

Задача №3. Прямоугольную таблицу $m \times n$ $(4 \le m \le n)$ назовем *хорошей*, если в каждую ее клетку можно вписать число 0 или 1 так, чтобы одновременно выполнялись условия:

1) не все вписанные числа равны 0 и не все равны 1;
2) число единиц во всех квадратах 3×3 одно и то же;
3) число единиц во всех квадратах 4×4 одно и то же.

Найдите все пары натуральных чисел (m, n) $(4 \le m \le n)$, для которых существует хорошая таблица $m \times n$.

Задача №4. Имеется куча из 100 камней. Разбиение этой кучи на k новых куч назовем *особым*, если, во-первых, количества камней в разных кучах разные, и, во-вторых, при любом дальнейшем разбиении любой из этих куч на две новые среди новых $k+1$ куч полученного разбиения найдутся две кучи с одинаковым числом камней (любая куча состоит, по крайней мере, из одного камня).

а) Найдите наибольшее число k, при котором для данной кучи из 100 камней существует особое разбиение на k куч.

б) Найдите наименьшее число k, при котором существует особое разбиение данной кучи на k куч.

Задача №5. Докажите, что если сумма действительных чисел a, b, c, d равна нулю, то для них выполняется неравенство

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 + 12 \ge 6(abc + abd + acd + bcd).$$

Задача №6. Про выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ известно, что $AD = BC + EF$, $BE = AF + CD$, $CF = DE + AB$. Докажите, что

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CD}{AF} = \frac{EF}{BC}.$$

3-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2007 год

Задача №1. Имеется 111 монет. Требуется разложить эти монеты по клеткам квадратной доски $n \times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1 (в клетках может быть по нескольку монет или не быть их вообще). При каком максимальном n это возможно?

Задача №2. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M так, что $\angle MBC = \angle MDC$, $\angle MBA = \angle MCD$. Докажите, что угол $\angle ADC$ равен одному из углов $\angle BMC$ или $\angle AMB$, если известно, что $\angle BAC = \angle DAC$.

Задача №3. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n, для которых число $2^n + 3^n$ делится на n^2.

Задача №4. Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ - множество действительных чисел, такая, что для любых действительных чисел x, y выполняется равенство:

$$f(x + f(y)) = f(x) + \sin y?$$

Задача №5. Множество всех положительных действительных чисел разбито на 3 непустых попарно непересекающихся множества.

а) Докажите, что можно выбрать 3 числа, по одному из каждого множества, которые служат длинами сторон некоторого треугольника.

б) Всегда ли можно выбрать числа (по одному из каждого множества) так, чтобы они являлись длинами сторон прямоугольного треугольника?

Задача №6. Про выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ известно, что диагонали AD, BE и CF пересекаются в одной точке M. Кроме того, треугольники ABM, BCM, CDM, DEM, EFM и FAM - остроугольные, а центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности. Докажите, что четырехугольники $ABDE$, $BCEF$ и $CDFA$ имеют равные площади.

4-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2008 год

Задача №1. Точки K, L, M, N - соответственно середины сторон AB, BC, CD, DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. Прямая KM пересекает диагонали AC и BD в точках P и Q соответственно. Прямая LN пересекает диагонали AC и BD в точках R и S соответственно.

Докажите, что если $AP \cdot PC = BQ \cdot QD$, то $AR \cdot RC = BS \cdot SD$.

Задача №2. Назовем многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами *хорошим*, если его можно представить в виде суммы кубов нескольких многочленов (от переменной x) с целыми коэффициентами. Например, многочлены $x^3 - 1$ и $9x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = (x-1)^3 + (2x)^3 + 2^3$ являются хорошими.

а) Является ли многочлен $P(x) = 3x + 3x^7$ хорошим?

б) Является ли многочлен $P(x) = 3x + 3x^7 + 3x^{2008}$ хорошим?

Обоснуйте ваши ответы.

Задача №3. Положим $A = \{(a_1, \ldots, a_8) | a_i \in \mathbb{N}, 1 \leq a_i \leq i+1\}$ для всех $i = 1, \ldots, 8\}$. Назовем подмножество $X \subset A$ *разреженным*, если для любых двух различных элементов $(a_1, \ldots, a_8), (b_1, \ldots, b_8) \in X$ существуют хотя бы три индекса i таких, что $a_i \neq b_i$.

Найдите наибольшее возможное количество элементов в разреженном подмножестве множества A.

Задача №4. Для всякого натурального n обозначим через $S(n)$ сумму цифр в десятичной записи числа n.

Найдите все натуральные n такие, что $n = 2S(n)^3 + 8$.

Задача №5. Непересекающиеся окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 касаются прямой ℓ в точках A_1 и A_2 соответственно (окружности лежат по одну сторону от ℓ). Точка K - середина отрезка A_1A_2. На окружностях ω_1 и ω_2 выбраны точки B_1 и B_2 соответственно так, что прямые KB_1 и KB_2 касаются ω_1 и ω_2 соответственно (точка B_1 отлична от A_1, а точка B_2 отлична от A_2). Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке L, а прямые KL и O_1O_2 - в точке P.

Докажите, что точки B_1, B_2, P и L лежат на одной окружности.

Задача №6. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{2}.$$

5-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2009 год

Задача №1. Найдите все такие пары целых чисел (x, y), что $x^2 - 2009y + 2y^2 = 0$.

Задача №2. Найдите все действительные a, для которых существует функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенству

$$x + af(y) \leq y + f(f(x))$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. (Здесь $\mathbb{R}$ - множество всех действительных чисел.)

Задача №3. Для выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ площади S докажите неравенство

$$AC(BD + BF - DF) + CE(BD + DF - BF) + AE(BF + DF - BD) \geq 2\sqrt{3}S.$$

Задача №4. На плоскости выбрана декартова система координат. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на параболе $y = x^2$, а точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат на параболе $y = 2009x^2$. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности, и точки A_i и B_i имеют одинаковые абсциссы при любом $i = 1, 2, 3, 4$. Докажите, что B_1, B_2, B_3, B_4 также лежат на одной окружности.

Задача №5. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle B = \angle D = 90°$. На отрезке AB выбрана такая точка M, что $AD = AM$. Лучи DM и CB пересекаются в точке N. Точки H и K - основания перпендикуляров, опущенных из точек D и C на прямые AC и AN, соответственно. Докажите, что $\angle MHN = \angle MCK$.

Задача №6. В клетчатом квадрате 17×17 n клеток окрашены в черный цвет. Назовем *линией* любой столбец, любую строку и любую из двух диагоналей квадрата. За один шаг, если в некоторой линии есть хотя бы 6 черных клеток, можно окрасить все ее клетки в черный цвет.

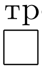
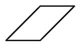
Найдите наименьшее такое n, что при некотором расположении исходных n черных клеток можно за несколько шагов окрасить все клетки квадрата.

6-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2010 год

Задача №1. Найдите все простые числа p, q такие, что $p^3 - q^7 = p - q$.

Задача №2. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и AD равны. На сторонах BC и CD отмечены точки M и N соответственно так, что $MN = BM + DN$. Прямые AM и AN вторично пересекают описанную окружность четырехугольника $ABCD$ в точках P и Q соответственно.

Докажите, что точка пересечения высот треугольника APQ лежит на отрезке MN.

Задача №3. Прямоугольник, образованный линиями клетчатой бумаги, разбивается на фигурки трех видов: равнобедренные прямоугольные треугольники с основанием в две клетки , квадраты из одной клетки , и параллелограммы , ограниченные двумя сторонами и двумя диагоналями клеток (фигурки могут быть ориентированы произвольным образом). Докажите, что в любом разбиении количество фигурок третьего вида четно.

Задача №4. На доске выписаны натуральные числа от 1 до n ($n > 2$). Рассмотрим следующую операцию: стираются два произвольных числа, а вместо них на доску выписывается наименьший простой делитель их суммы. Операция проводится до тех пор, пока на доске не останется одно число. Найдите наименьшее возможное n, при котором оставшимся числом может быть число 97.

Задача №5. В каждой вершине правильного n-угольника расположено по одной фишке. За один *ход* можно поменять местами любые две соседние фишки. За какое наименьшее число ходов можно добиться такого расположения фишек, при котором каждая фишка сместится на $\left[\frac{n}{2}\right]$ позиций по часовой стрелке относительно своего начального расположения?

Задача №6. Все стороны треугольника ABC различны. Пусть O, I, H - соответственно центр описанной окружности, центр вписанной окружности и точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что

а) $\angle OIH > 90^\circ$;

б) $\angle OIH > 135^\circ$.

7-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2011 год

Задача №1. В трапеции $ABCD$ точки M и N - середины оснований AD и BC соответственно.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная, если известно, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на отрезке MN.

б) Остается ли утверждение пункта а) в силе, если известно лишь, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на прямой MN?

Задача №2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y).$$

(Здесь $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел.)

Задача №3. Обозначим через $\mathbb{N}$ множество всех целых положительных чисел. Упорядоченную пару $(a; b)$ чисел $a, b \in \mathbb{N}$ назовем *интересной*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что число $a^k + b$ делится на 2^n. Найдите все интересные упорядоченные пары чисел.

Задача №4. Найдите наибольшее возможное число множеств, удовлетворяющих одновременно следующим условиям:

i) каждое множество состоит из 4 элементов;

ii) любые два различных множества имеют ровно два общих элемента;

iii) никакие два элемента не принадлежат одновременно всем множествам.

Задача №5. Пусть n - целое число, $n > 1$. Элемент a из множества $M = \{1, 2, \ldots, n^2 - 1\}$ назовем *хорошим*, если найдется элемент b из M такой, что число $ab - b$ делится на n^2. Далее, элемент a назовем *очень хорошим*, если $a^2 - a$ делится на n^2. Пусть g и v - число хороших и число очень хороших элементов в M соответственно. Докажите, что $v^2 + v \leq g \leq n^2 - n$.

Задача №6. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, точки M и N - середины диагоналей AC и BD соответственно. Описанные окружности треугольников ADM и BCM пересекаются в точках M и L. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности (все эти точки предполагаются различными).

8-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2012 год

Задача №1. Внутри стороны AB остроугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка D. Точки M и N - основания перпендикуляров, опущенных из D на стороны BC и AC соответственно. Пусть H_1 и H_2 - ортоцентры треугольников MNC и MND соответственно. Докажите, что площадь четырехугольника AH_1BH_2 не зависит от положения точки D на стороне AB.

Задача №2. Множество (единичных) клеток таблицы $n \times n$ назовём *удобным*, если в каждой строке и каждом столбце таблицы есть по крайней мере две клетки этого множества. При каждом $n \geq 5$ найдите наибольшее m, для которого найдётся удобное множество из m клеток, которое перестает быть удобным при удалении любой из его клеток.

Задача №3. Многочлены P, Q, R с вещественными коэффициентами таковы, что многочлен $P(Q(x)) + P(R(x))$ - постоянный. Докажите, что хотя бы один из многочленов $P(x)$ и $Q(x) + R(x)$ является постоянным.

Задача №4. Существуют ли целые числа m, n и функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, одновременно удовлетворяющие следующим двум условиям (здесь $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел):

i) $f(f(x)) = 2f(x) - x - 2$ для любого $x \in \mathbb{R}$;
ii) $m \leq n$ и $f(m) = n$?

Задача №5. На диагоналях выпуклого четырехугольника $ABCD$ построены правильные треугольники ACB' и BDC', причем точки B и B' лежат по одну сторону от AC, а точки C и C' лежат по одну сторону от BD. Найдите $\angle BAD + \angle CDA$, если известно, что $B'C' = AB + CD$.

Задача №6. Найдите все целочисленные решения уравнения:

$$2x^2 - y^{14} = 1.$$

9-я Международная Жаутыковская олимпиада, 2013 год

Задача №1. Дана трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), в которой $\angle ABC > 90^\circ$. На боковой стороне AB отмечена точка M. Обозначим через O_1 и O_2 центры описанных около треугольников MAD и MBC окружностей соответственно. Известно, что описанные около треугольников MO_1D и MO_2C окружности вторично пересекаются в точке N. Докажите, что прямая O_1O_2 проходит через точку N.

Задача №2. Найдите все нечетные натуральные $n > 1$ такие, что существует перестановка $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$, в которой при всех k, $1 \le k \le n$, одно из чисел $a_k^2 - a_{k+1} - 1$ и $a_k^2 - a_{k+1} + 1$ делится на n (здесь мы считаем $a_{n+1} = a_1$).

Задача №3. Пусть $a, b, c, d > 0$, $abcd = 1$. Докажите неравенство

$$\frac{(a-1)(c+1)}{1+bc+c} + \frac{(b-1)(d+1)}{1+cd+d} + \frac{(c-1)(a+1)}{1+da+a} + \frac{(d-1)(b+1)}{1+ab+b} \ge 0.$$

Задача №4. Дан квадратный трехчлен $p(x)$ с вещественными коэффициентами. Докажите, что существует натуральное n, для которого уравнение $p(x) = \frac{1}{n}$ не имеет рациональных корней.

Задача №5. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Расстояние между прямыми AB и DE равно расстоянию между прямыми BC и EF и расстоянию между прямыми CD и FA. Докажите, что сумма $AD + BE + CF$ не превосходит периметра шестиугольника $ABCDEF$.

Задача №6. Таблица 10×10 разбита на 100 единичных квадратиков. Назовем *блоком* любой квадрат 2×2, состоящий из четырех единичных квадратиков этой таблицы. Множество C, состоящее из n блоков, покрывает таблицу (т.е. каждый единичный квадратик таблицы накрыт некоторым блоком из C), но никакие $n-1$ блоков из C эту таблицу не покрывают. Найдите наибольшее возможное значение n.