Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Први разред – А категорија

1. Нека је $ABCD$ трапез код кога је $AB \parallel CD$ и P тачка на продужетку дијагонале AC тако да је C између A и P. Ако су X и Y средишта основица AB и CD, а M и N пресечне тачке правих PX и PY са дужима BC и DA, редом, доказати да је права MN паралелна основицама трапеза.

2. У једнакостраничном троуглу $\triangle ABC$ је $|AB| = 2$. Нека су M и N унутрашње тачке странице AB такве да је $|MN| = 1$. Доказати да је $\sphericalangle MCN > 30^\circ$.

3. Колико има тројки природних бројева (a, b, c) таквих да је $2a+1$ дељиво са b, $2b+1$ дељиво са c, и $2c+1$ дељиво са a?

4. Шаховска табла димензија 2004×2004 је поплочана доминама димензија 1×4. Може ли број хоризонталних домина да буде једнак броју вертикалних домина?

5. Колико има природних бројева n, $10 \leqslant n < 100000$, дељивих са 4 у чијем се декадном запису не појављује цифра 0 и никоје две суседне цифре нису једнаке?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Други разред – А категорија

1. Дат је троугао $\triangle ABC$. Права симетрична тежишној дужи из A у односу на симетралу угла $\sphericalangle BAC$ сече описани круг троугла $\triangle ABC$ у K. Нека је L средиште дужи AK. Доказати:
$$\sphericalangle BLC = 2\sphericalangle BAC.$$

2. Наћи максималну вредност израза
$$I = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$
ако су $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e \geqslant 0$ реални бројеви за које важи $a+b \leqslant 5$ и $c+d+e \leqslant 5$. Када се постиже та вредност?

3. Нека је a природан број већи од 1. Доказати да је број
$$n(2n+1)(3n+1)\dots(an+1)$$
дељив свим простим бројевима мањим од a, за сваки природан број n.

4. Разлика корена квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$ једнака је 4. Наћи те корене тако да збир $p+q$ буде најмањи могући.

5. Постоји ли бесконачан подскуп скупа природних бројева такав да ниједан његов члан, нити збир неколико његових елемената није степен природног броја (тј. није број облика a^k, $a, k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$)?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је круг k и његов пречник AB. Нека је P произвољна тачка тог круга различита од A и B. Пројекција тачке P на AB је Q. Круг са центром P и полупречником PQ сече круг k у C и D. Пресек правих CD и PQ је тачка E. Нека је F средиште AQ, а G подножје нормале из F на CD. Доказати да је $EP = EQ = EG$ и да су тачке A, G и P колинеарне.

2. У скупу реалних бројева наћи сва решења система једначина
$$x = 1 + \sqrt{y}, \quad y = 1 + \sqrt{z}, \quad z = 1 + \sqrt{x}.$$

3. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такав да
$$n \mid \left(1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n\right) + 1,$$
доказати да n није дељив ниједним квадратом већим од 1.

4. Функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је таква да је
$$x + f(x) = f(f(x))$$
за свако $x \in \mathbb{R}$. Наћи сва решења једначине $f(f(x)) = 0$.

5. Дејан је пре x година имао x пута мање година него онда кад је y година раније имао y пута мање године него што има сада, при чему су x, y и број Дејанових година природни бројеви. Колико све година може да има Дејан?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Четврти разред – А категорија

1. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$ код кога је $DC = DE$ и $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DEA = 90^\circ$. Нека је F унутрашња тачка сегмента AB одређена условом $AF : BF = AE : BC$. Доказати да је $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE$ и $\sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC$.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека су M, N и P средишта страница AB, AC и BC, A_0 подножје нормале из тачке N на страницу BC, и нека је A_1 средиште дужи MA_0. Конструишимо аналогно B_1 и C_1. Доказати да се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу ако и само ако је троугао ABC једнакокрак.

3. Означимо са $d(n)$ број делилаца природног броја n. Одредити све природне бројеве n такве да међу бројевима
$$n,\ d(n),\ d(d(n)),\ d(d(d(n))),\ \ldots$$
нема ниједног потпуног квадрата.

4. Наћи све 1-1 функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ које задовољавају услове:
$$1^\circ\ f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \qquad 2^\circ\ f(1) = 2, \quad f(2) = 4.$$

5. Нека је A скуп од 6 елемената. Доказати да у свакој фамилији $\{A_1, A_2, \ldots, A_{11}\}$ различитих троелементних подскупова од A, постоје три различита скупа A_i, A_j и A_k који су сви подскупови истог четвороелементног скупа.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Први разред – Б категорија

1. Нека с у a, b и c три различите цифре, од којих ниједна није једнака нули, за које важи
$$\overline{abc} : c = \overline{bc}.$$
Одредити те цифре.

2. У правоуглом троуглу $\triangle ABC$ над катетом AC као над пречником конструисан је круг k који сече хипотенузу AB у тачки E. У тачки E конструисана је тангента t круга k која сече катету BC у тачки D. Доказати да је троугао $\triangle BDE$ једнакокраки.

3. Дат је паралелограм $ABCD$. На правама AB, BC, CD и DA изабране су, редом, тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 тако да је B средиште дужи AA_1, C средиште дужи BB_1, D средиште дужи CC_1 и A средиште дужи DD_1.
а) Доказати да је четвороугао $A_1B_1C_1D_1$ такође паралелограм.
б) Израчунати површину четвороугла $A_1B_1C_1D_1$, ако је површина четвороугла $ABCD$ једнака $2004cm^2$.

4. Одредити коефицијенте $a, b \in \mathbb{R}$ полинома $P(x) = x^3 + ax^2 - 2x + b$ ако се зна да је $x = -2$ нула полинома и да $P(x)$ при дељењу са $x + 3$ даје остатак -12, а затим факторисати полином $P(x)$.

5. Колико има природних бројева n, $10 \leqslant n < 100000$, дељивих са 4 у чијем се декадном запису не појављује цифра 0 и никоје две суседне цифре нису једнаке?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Други разред – Б категорија

1. Наћи сва реална решења једначине
$$(x^3 - 9x^2 - x + 9)^2 + (x^3 + 3x^2 - x - 3)^4 = 0.$$

2. Нека је AB пречник круга k и тетиве AD и BC тог круга се секу у тачки E. Доказати да
$$AE \cdot AD + BE \cdot BC$$
не зависи од избора тачака C и D.

3. Наћи све природне бројеве x и y тако да важи $x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leqslant 1$.

4. Разлика корена квадратне једначине $x^2 + px + q = 0$ $(p, q \in \mathbb{R})$ једнака је 4. Наћи те корене тако да збир $p + q$ буде најмањи могући.

5. Наћи све целе бројеве m такве да важи $(1 + i)^m = (1 - i)^m$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Трећи разред – Б категорија

1. Који је од бројева $2^{\sqrt{\log_2 2004}}$ и $2004^{\sqrt{\log_{2004} 2}}$ већи?

2. Наћи висину правилне четворостране пирамиде ако је запремина лопте описане око пирамиде једнака V, а нормала, конструисана из центра те лопте на бочну страну, образује са висином пирамиде угао α.

3. Нека је O средиште описаног круга једнакокраког тоугла $\triangle ABC$. Ако је $AB = AC = b$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$ $(\alpha \neq 120^\circ)$. Наћи дужину дужи BD, при чему је D пресечна тачка правих BO и AC.

4. Доказати да за све α и $\beta \neq k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ важи неједнакост

$$\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta} + \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta} \geqslant 1.$$

Када важи једнакост?

5. У зависности од реалног параметра a решити систем једначина:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & az & = & 3 \\ x & + & ay & + & 3z & = & 2 \end{array} .$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи све просте бројеве p и q такве да једначина $x^4 - px^3 + q = 0$ има цео корен.

2. Наћи све природне бројеве n такве да функција $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{5}{n} x$ има период 3π.

3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned} x_1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) &= 1 \\ x_2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) &= 3 \\ x_3(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) &= 5 \\ &\vdots \\ x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) &= 2n - 1 \ . \end{aligned}$$

4. Наћи све реалне вредности параметра a такве да функција

$$f(x) = \frac{1}{3} 2^{3x} + a \cdot 2^{2x-1} + (1-a)2^x$$

буде растућа за све вредности $x \in \mathbb{R}$.

5. Доказати да за све природне бројеве n важи

$$\log(n+1) > \frac{\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n}{n} \ .$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.