21. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Плевен, Бугарска – 7. мај 2004.

1. Низ реалних бројева $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задовољава релацију:

$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$$

за све $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n$. Ако је $a_1 = 3$, наћи a_{2004}. *(Кипар)*

2. Решити у скупу простих бројева једначину:

$$x^y - y^x = x \cdot y^2 - 19.$$

(Албанија)

3. Нека је O унутрашња тачка оштроуглог троугла $\triangle ABC$. Кругови са центрима у средиштима страница троугла $\triangle ABC$, који пролазе тачку O, међусобно се секу у тачкама K, L и M, различитим од O. Доказати да је O центар уписаног круга троугла $\triangle KLM$ ако и само ако је O центар описаног круга око троугла $\triangle ABC$. *(Румунија)*

4. Раван је подељена на области коначним бројем правих, од којих никоје три не пролазе кроз исту тачку. Две области називамо "суседним" уколико је њихова заједничка граница: дуж, полуправа или права. Потребно је у свакој области уписати цео број такав да важе следећа два услова:

- 1° производ бројева из суседних области је мањи од њиховог збира;
- 2° збир свих бројева са сваке стране произвољне праве једнак је нули.

Доказати да је то могуће ако и само ако све праве нису паралелне.

(Србија и Црна Гора)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.