24. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 23. фебруара 2003. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (4 поена). 2003 долара је распоређено у новчанике, а новчаници су смештени у џепове. Познато је да је број новчаника већи од броја долара у било ком џепу. Да ли је тачно да је број џепова већи од броја долара у неком од новчаника? (Није допуштено стављати новчанике један у други)

2. (4 поена). Два играча наизменично боје странице n-тоугла. Први може да обоји страницу која је суседна са 0 или 2 обојене странице, а други страницу која је суседна са једном обојеном страницом. Губи онај играч који не може да одигра потез. За које вредности n други играч може да победи независно од игре првог?

3. (4 поена). На крацима AB и BC једнакокраког троугла ABC налазе се тачке K и L респективно, такве да је $AK + LC = KL$. Кроз средиште дужи KL пролази права паралелна са BC, и та права сече страницу AC у тачки N. Наћи величину угла KNL.

4. (5 поена). У низу природних бројева сваки број, осим првог, је једнак збиру претходног броја и његове највеће цифре. Колико највише непарних узастопних бројева може садржати такав низ?

5. (5 поена). Може ли се табла величине 2003×2003 поплочати доминама величине 1×2, које је дозвољено стављати само хоризонтално, и правоугаоницима величине 1×3, које је дозвољено стављати само вертикално? (Две паралелне странице табле условно зовемо хоризонталним, а друге две вертикалним.)

24. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Припремна варијанта, 23. фебруара 2003. год.

10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (3 поена). 2003 долара је распоређено у новчанике, а новчаници су смештени у џепове. Познато је да новчаника има више него долара у било ком џепу. Да ли је тачно да џепова има више него долара у неком од новчаника?

2. (3 поена). Дато је 100 штапића, од којих се може саставити 100-угао. Да ли се може десити да се ни од ма којег мањег броја тих штапића не може саставити многоугао?

3. (4 поена). У троуглу ABC је одабрана тачка M тако да полупречници описаних кружница троуглова AMC, BMC и BMA нису мањи од полупречника кружнице описане око троугла ABC. Доказати да су сва четири полупречника једнака..

4. (5 поена). Сто бројева је поређано у растућем поретку: 00, 01, 02, 03, ... ,99. Затим су они испремештани тако да се сваки следећи број добија из претходног тако што се њему тачно једна цифра повећа или смањи за 1 (на пример, после 29 може се појавити само 19, 39 или 28, а 20 или 30 се не могу појавити). Колико највише бројева може остати на свом месту?

5. (5 поена). Дат је правоугаоник од картона чије су странице a cm и b cm, где је $b/2 < a < b$. Доказати да га је могуће разрезати на три дела од којих се може саставити квадрат.

24. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 2. марта 2003. год.

8–9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (4 поена). Васа напише на табли једначину $ax^2 + bx + c = 0$ са позитивним целобројним коефицијентима a, b и c. После тога Петар, ако жели, може да замени један или два знака "+" знаком "–". Ако добијена једначина има оба корена целобројна, онда побеђује Васа, а ако пак добијена једначина нема корена (решења) или је бар један од корена нецелобројан, онда побеђује Петар. Може ли Васа тако одабрати коефицијенте једначине да сигурно победи Петра?

2. (4 поена). Дат је троугао ABC. У њему је R - полупречник описане кружнице, r - полупречник уписане кружнице, a - дужина најдуже странице, h - дужина најмање висине. Доказати да је $R/r > a/h$.

3. На турниру је свака од 15 екипа одиграла са сваком другом екипом тачно један меч.

а) (4 поена) Доказати да су се барем у једном мечу сусреле екипе које су, до тог меча, у збиру одиграле непаран број мечева.

б) (3 поена) Може ли такав меч бити јединствен?

4. (7 поена) Чоколада облика једнакостраничног троугла станице дужине n издељена је браздама на мале троуглове чије су странице дужине 1 (свака страница је подељена на n једнаких делова, деоне тачке на сваком пару страница су спојене дужима паралелним трећој страници). Два играча играју игру. У једном потезу се може одломити троугаоно парче чоколаде (дуж бразде), појести га и остатак предати противнику. Онај који добије последње парче - троугао странице 1 - је победник. Ако играч не може да одигра потез, одмах губи игру. За свако n установите који од играча, први (онај који почиње) или други, може играти тако да увек победи (независно од игре противника).

5. (7 поена) Који је највећи број поља табле 9x9 која се могу разрезати по обе дијагонале, тако да се при томе табла не распадне на неколико делова?

6. (7 поена) Трапез са основицама AD и BC описан је око кружнице, E је тачка пресека његових дијагонала. Доказати да угао AED не може бити оштар.

24. ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло.

Основна варијанта, 2. марта 2003. год.
10–11. разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

---

1. (4 поена). Дата је тространа пирамида $ABCD$. У њој је R - полупречник описане сфере, r - радијус уписане сфере, a - дужина најдуже ивице, h - дужина најмање висине (на једну од страна пирамиде). Доказати да је $R/r > a/h$.

2. (5 поена). Дат је полином $P(x)$ са реалним коефицијентима. Бесконачан низ различитих природних бројева a_1, a_2, a_3, ... је такав да је $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$, итд. Који степен може имати полином $P(x)$?

3. (5 поена). Може ли се површина коцке у потпуности покрити са три троугла без преклапања?

4. (6 поена). У кружницу је уписан правоугли троугао ABC чија је хипотенуза AB. Нека је K средиште лука BC који не садржи тачку A; N - средиште дужи AC; M - тачка пресека полуправе KN са кружницом. У тачкама A и C су конструисане тангенте на кружницу, које се секу у тачки E. Доказати да је угао EMK прав.

5. (6 поена). Бора је замислио цео број, већи од 100. Кира каже цео број d, већи од 1. Ако је Борин број дељив са d, онда Кира побеђује, а у супротном Бора одузима од свог броја број d и игра се наставља. Кира нема право да каже број које је раније рекла. Када Борин број постане негативан, Кира губи. Може ли Кира тако играти да сигурно победи?

6. (7 поена). У сваком пољу таблице величине 4×4 је записан знак "+" или "–". Дозвољено је истовремено мењати знак у произвољном пољу и свим пољима која имају заједничку страницу са тим пољем. Колико се различитих таблица може добити, више пута примењујући описану операцију?

7. (8 поена). Унутар квадрата је одабрано неколико тачака и те тачке су спојене дужима између себе и са теменима квадрата, тако да те дужи не секу једна другу (осим на крајевима). Тиме је квадрат подељен на троуглове и то тако да је свака одабрана тачка теме неког троугла, а ниједна се не налази на страници неког троугла. За сваку одабрану тачку, као и за свако теме квадрата, пребројане су одатле повучене дужи. Може ли се десити да сви таако добијени бројеви буду парни?