САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Нови Сад, 19. април 2003.

Први разред

1. Одредити број решења једначине

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{10}^4 = 2011$$

у скупу природних бројева.

2. У координатној равни је дата дуж AB дужине 2003. Колики је највећи број јединичних квадрата чија темена имају целобројне координате и које дата дуж сече?

Дуж сече јединични квадрат ако садржи бар једну његову унутрашњу тачку, тј. тачку која није на контури квадрата.

3. Нека су a, b, c странице троугла чији су одговарајући углови $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 80^\circ$. Доказати да је

$$a(a + b + c) = b(b + c).$$

4. У равни је дат оштар угао са теменом O и крацима Op_1 и Op_2. Нека је k_1 кружница чији центар припада краку Op_1 и која додирује крак Op_2. Кружница k_2 додирује краке угла и кружницу k_1 споља. Одредити геометријско место тачака додира кружница k_1 и k_2, када центар кружнице k_1 пролази полуправу Op_1.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Нови Сад, 19. април 2003.

Други разред

1. Дат је троугао ABC са страницама a, b, c и површином S.

(а) Доказати да постоји троугао $A_1B_1C_1$ са страницама $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$.

(б) Ако је S_1 површина троугла $A_1B_1C_1$, доказати да је $S_1^2 \geq \dfrac{S\sqrt{3}}{4}$.

2. Нека је $ABCD$ квадрат уписан у кружницу k и P произвољна тачка те кружнице. Доказати да је бар једна од дужина PA, PB, PC, PD ирационална.

3. Нека је $ABCD$ правоугаоник. У појасу између паралелних правих AB и CD одредити скуп тачака из којих се дужи AB и CD виде под истим углом.

4. Подскуп S скупа природних бројева $\mathbb{N}$ има следећа својства:

(i) међу сваких 2003 узастопних природних бројева постоји један који је садржан у S;

(ii) ако $n \in S$ и $n > 1$, онда и $\left[\frac{n}{2}\right] \in S$.

Доказати да је $S = \mathbb{N}$.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Нови Сад, 19. април 2003.

Трећи и четврти разред

1. Доказати да је за сваки природан број n број $[(5+\sqrt{35})^{2n-1}]$ дељив са 10^n.

2. Дата је функција $f\,[0,1] \to \mathbf{R}$ која има следећа својства:
(i) $f(x) \geq 0$ за све $x \in [0,1]$;
(ii) $f(1) = 1$;
(iii) ако $x_1, x_2 \in [0,1]$ и $x_1 + x_2 \leq 1$, онда је $f(x_1) + f(x_2) \leq f(x_1 + x_2)$.
Доказати да за свако $x \in [0,1]$ важи $f(x) \leq 2x$.

3. Дата је кружница k и тачка P ван ње. Променљива права s која садржи тачку P сече кружницу k у тачкама A и B. Нека су M и N средишта лукова одређених тачкама A и B и тачка C на дужи AB таква да је $PC^2 = PA \cdot PB$.
Доказати да угао $\angle MCN$ не зависи од праве s.

4. Нека је n паран број и S скуп свих низова дужине n чији су чланови нуле и јединице, са бар једном јединицом. Доказати да се S може поделити на дисјунктне трочлане подскупове тако да важи: за свака три низа $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n$, $(c_i)_{i=1}^n$ који припадају истом подскупу и свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ број $a_i + b_i + c_i$ дељив је са 2.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.