

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Први разред – А категорија

1. Наћи највећи заједнички делилац бројева $\underbrace{11111111}_8$ и $\underbrace{111\dots11}_{100}$.

2. Растојање између села A и B је 3 километра. У селу A има 100 ђака, а у селу B 50 ђака. На ком растојању од села A треба саградити школу, тако да укупан пут који сви ђаци прелазе у току једног дана буде најмањи?

3. Нека су a , b и c странице троугла и

$$p = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}, \quad q = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}.$$

Доказати да је $|p - q| < 1$.

4. Дијагонала AC четвороугла $ABCD$ уписаног у круг је пречник тог круга. Доказати да су пројекције страница AB и CD на дијагоналу BD једнаке.

5. Студент је у току петогодишњих студија положио 31 испит. Сваке године је дао више испита него претходне, а на петог години је дао три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Други разред – А категорија

1. Базен се пуни двама цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?

2. У скупу целих бројева решити једначину

$$x^2 + y^2 = 3(u^2 + v^2).$$

3. Нека су a и b реални бројеви такви да је $(\forall x \in \mathbb{R}) a \cos x + b \cos 3x \leq 1$. Доказати да је тада $|b| \leq 1$.

4. Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом код темена C ($\sphericalangle BCS = 90^\circ$) и нека симетрала правог угла сече хипотенузу у тачки D . Нека су тачке K и E подножја нормала из тачке D на странице BC и AC , редом. Доказати да је

$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$

5. На катетама једнакокрако-правоуглог троугла ABC ($\sphericalangle BCS = 90^\circ$), изабране су тачке $D \in AC$ и $E \in BC$, такве да је $CD = CE$. Нека су K и L тачке са дужи AB , такве да је $DK \perp AE$ и $CL \perp AE$. Доказати да је $KL = LB$.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Трећи разред – А категорија

1. Доказати да једначина $x^n + y^n = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ нема решења у скупу природних бројева, где је $z \leq n$.

2. Решити систем у зависности од реалног параметра a :

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2^x + 2y - 3 \arcsin z &= 7 \\ 2^x - y - \arcsin z &= -6 \\ 5 \cdot 2^x - y + \arcsin z &= 6a + 2. \end{aligned}$$

3. На колико начина се број 2002 може представити у облику збира нерастућих природних бројева (више од једног сабирка) таквих да је и њихов производ једнак 2002?

4. Нека су $b = CA$ и $c = AB$ странице троугла ABC и l_a дужина симетрале угла код темена A . Доказати да, ако важи $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l_a}$, онда је $\sphericalangle BAC = 120^\circ$.

5. Многоугао који је описан око круга полупречника r , разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника уписаних кругова у те троуглове већа од r .

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати да за позитивне реалне бројеве a , b и c важи неједнакост

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc.$$

2. У скупу ненегативних целих бројева решити једначину

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

3. Доказати да за реалне бројеве a и b важи

$$a \leq b \Rightarrow a^3 - 12a - 16 \leq b^3 - 12b + 16.$$

4. Нека су $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ странице троугла $\triangle ABC$ у коме је $\sphericalangle BAC = 3 \cdot \sphericalangle ABC$. Доказати да је тада

$$bc^2 = (a - b)^2(a + b).$$

5. Многоугао који је описан око круга полупречника r разложен је на коначно много троуглова. Доказати да је сума полупречника уписаних кругова у те троуглове већа од r .

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Први разред – Б категорија

1. Испитати када израз $(n - 2)^3 + n^3 + (n + 2)^3$, $n \in \mathbb{N}$ није дељив са 18.
2. Растојање између села A и B је 3 километра. У селу A има 100 ђака, а у селу B 50 ђака. На ком растојању од села A треба саградити школу, тако да укупан пут који сви ђаци прелазе у току једног дана буде најмањи?
3. Бува се налази у координатној равни. Из тачке (m, n) бува може да скочи у једну од тачака (n, m) , $(m - n, n)$ или $(m + n, n)$. Да ли бува може да дође у тачку $(12, 32)$ ако се на почетку налази у тачки:
а) $(7, 12)$; б) $(8, 12)$?
4. Познато је да су сви Плинкови Планкови и да су неки од Плонкова Плинкови. Који искази морају бити тачни:
а) "Неки Планкови су Плонкови."
б) "Неки Плинкови нису Плонкови."
в) "Ниједан Плонк није Планк."
5. Студент је у току петогодишњих студија положио 31 испит. Сваке године је дао више испита него претходне, а на петој години је дао три пута више испита него на првој. Колико испита је студент положио на четвртој години?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Други разред – Б категорија

1. Базен се пуни двама цевима за 6 сати. Прва цев би га напунила за 5 сати мање од друге. За које време би базен напунила друга цев?
2. Решити једначину: $(x - 3)^4 + (x - 4)^4 = (2x - 7)^4$, у скупу комплексних бројева.
3. Нека су a, b, c позитивни бројеви, такви да важи $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Доказати да је $a(b + c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом код темена C ($\sphericalangle BCS = 90^\circ$) и нека симетрала правог угла сече хипотенузу у тачки D . Нека су тачке K и E подножја нормала из тачке D на странице BC и AC , редом. Доказати да је

$$AD^2 + BD^2 = (AE + BK)^2.$$

5. Наћи све природне бројеве n , такве да је број $z = \left(\frac{3+i}{2-i}\right)^n$ реалан.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Трећи разред – Б категорија

1. У паралелограму са странама a , b и оштрим углом α конструисане су симетрале унутрашњих углова. Одредити површину четвороугла одређеног тим симетралама.
2. Решити једначину $4^{\log_{10} x} - 32 + x^{\log_{10} 4} = 0$.
3. На равном столу налазе се три лопте, полупречника r_1 , r_2 , r_3 . Оне додирују сто у тачкама A_1 , A_2 и A_3 , редом, и сваке две се међусобно додирују. Ако је $A_1A_2 = 4$, $A_2A_3 = 6$, $A_1A_3 = 8$, наћи r_1 , r_2 и r_3 .
4. У тространој пирамиди $SABC$ сви ивични углови код темена S су прави. Нека је O подножје висине пирамиде из темена S . Ако је површина троугла AOB четири пута већа од површине троугла BOC , наћи однос површина троуглова ASB и BSC .
5. Казаљке на сату су преклопљене тачно у поноћ. Када ће се следећи пут преклопити?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.01.2003.

Четврти разред – Б категорија

1. Доказати да сви комплексни бројеви z , за које важи $|z - 1| = 2|z + 1|$, припадају једном кругу. Наћи центар и полупречник тог круга.
2. Наћи све просте бројеве p за које је број $7p + 1$ квадрат природног броја.
3. Наћи реална решења система једначина

$$x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \quad 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0.$$

4. Нека је $a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$ аритметички низ. Доказати да важи :

$$a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 = \frac{(a_n a_{n+1})^2 - (a_1 a_0)^2}{4d},$$

где је d разлика низа.

5. Казаљке на сату су преклопљене тачно у поноћ. Када ће се следећи пут преклопити?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.