Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Први разред – А категорија

1. Нека је k природан број. Доказати да број $2^{2k-1} + 2^k + 1$ није дељив са 7.

2. У скупу целих бројева решити једначину

$$2m^2 + n^2 = 2mn + 3n.$$

3. Доказати да за свако $n \geqslant 2$ постоји n различитих природних бројева, таквих да је збир њихових квадрата квадрат природног броја.

4. Нека су t_a и t_b тежишне дужи, које одговарају страницама BC и CA троугла ABC, а P његова површина. Доказати да важи

$$t_a \cdot t_b \geqslant \frac{3}{2}P.$$

Када важи једнакост?

5. У равни су дате две тачке и права. Конструисати троугао ABC, код кога су те две тачке средишта страница BC и CA, а висина из темена A припада датој правој.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Други разред – А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt{x^2+x+1}+2\sqrt{x+3}=\sqrt{6x^2-2x-18}.$$

2. На колико начина таблица $m \times n$ може да се попуни бројевима 1 и -1, тако да производ бројева у свакој врсти буде једнак 1, а производ бројева у свакој колони буде -1?

3. Дат је круг полупречника 1. У његовој унутрашњости или на граници, изабрано је 8 тачака. Доказати да међу њима постоје две, чије је растојање мање од 1. Да ли тврђење важи за 7 тачака ?

4. Тачке A, B и C припадају једној правој. Над AB, BC и AC, као пречницима, са исте стране те праве, конструисане су три полукружнице. Центар кружнице k, која додирује сваку од три дате полукружнице, налази се на растојању d од праве AC. Наћи полупречник кружнице k.

5. Троугао састављен од тежишних дужи троугла ABC сличан је троуглу ABC. Наћи коефицијент сличности.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Трећи разред – А категорија

1. Дата је једначина $x^3 - px + q = 0$, $q \neq 0$, која има три реална решења.
а) Доказати да је $p > 0$.
б) Ако је и $q > 0$, доказати да за најмањи по апсолутној вредности корен ове једначине, α, важи $|\alpha| \leqslant \min\left(\sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}}\right)$.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \ldots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}}$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \ldots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}.$$

3. Доказати да се у координатној равни не може нацртати конвексни четвороугао, коме је једна дијагонала два пута дужа од друге, угао између дијагонала му је 45°, а координате свих темена су цели бројеви.

4. Дата је тачка P унутар неког неког круга. Кроз тачку P постављамо две међусобно нормалне тетиве. У ком положају је збир дужина тих тетива најмањи, а у ком највећи и колике су те екстремне вредности, ако је полупречник кружнице R, а растојање тачке P од центра те кружнице d $(0 < d < R)$?

5. Нека је $a = \sqrt[2003]{2003}$. Шта је веће $\left.a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}\right\}\text{2003 пута}$ или 2003?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Четврти разред – А категорија

1. У скупу комплексних бројева решити систем :

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 5$$

$$x^3y + xy^3 = 1.$$

2. Доказати да за сваки природан број n важи

$$(2n+1)^n \geqslant (2n)^n + (2n-1)^n.$$

3. Нека је $a_1 = a_2 = 1$ и $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказати да су за свако $k, n \in \mathbb{N}$ бројеви $ka_{n+2} + a_n$ и $ka_{n+3} + a_{n+1}$ узајамно прости.

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека је P полином са целобројним коефицијентима, такав да је $0 < |P(i)| < n$ за $i = 1, \ldots, n$. Доказати да полином P нема целобројну нулу.

5. Наћи највећу могућу запремину правилне четворостране пирамиде, бочне ивице 1.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Први разред – Б категорија

1. Нека је n природан број. Доказати да је број $8n^3-12n^2+6n+63$ сложен.

2. Нека је четвороугао $ABCD$ и тетивни и тангентни. Ако је разлика страница AD и BC једнака разлици страница AB и CD, доказати да је AC пречник круга описаног око четвороугла $ABCD$.

3. Нека су m и n узајамно прости природни бројеви. Познато је да се разломак $\dfrac{3n-m}{5n+2m}$ може скратити неким природним бројем. Наћи број којим се овај разломак може скратити.

4. Доказати да функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, за коју важи $f(x^2)-(f(x))^2 \geqslant \dfrac{1}{4}$ за свако $x\in\mathbb{R}$ није инјективна $\Big($тј. постоје $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $x_1\neq x_2$ такви да $f(x_1)=f(x_2)\Big)$.

5. У равни су дата два скупа паралелних правих $a_1,a_2,\ldots,a_{13}$ и b_1, $b_2,\ldots,b_7$. Праве првог скупа секу праве другог скупа. Колико је паралелограма одређено овим правама?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да за свако природно n, $n \geqslant 2$ важи неједнакост :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n^2} > 1.$$

2. Одредити све комплексне бројеве z за које важи $|z| = \dfrac{1}{|z|} = |z-1|$.

3. Нека једначина $(a-1)x^2 - (a+1)x + 2a - 1 = 0, a \in \mathbb{R}, a \neq 1$ има решења x_1 и x_2. Одредити вредност параметра b, тако да производ $(x_1 - b)(x_2 - b)$ не зависи од a.

4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}.$$

5. У правоуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине из темена A на хипотенузу BC, E је средиште дужи AD, а F је пресек правих BE и AC. Ако је $BD = 4$, $CD = 9$, наћи дужину дужи BF.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Трећи разред – Б категорија

1. Основице правоуглог трапеза у кога се може уписати круг су a и b. Израчунати површину овог трапеза.

2. У лопту је уписана пирамида, чија је основа правоугаоник дијагонале d. Бочне ивице пирамиде нагнуте су према равни основе под углом β. Наћи полупречник лопте.

3. Наћи све целе бројеве x, такве да је $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ цео број.

4. Доказати да важи: $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

5. Доказати да за $p \geqslant 0$ важи неједнакост

$$(2003^p)^{1-2003^p} + (2003^{2p})^{1-2003^{2p}} + \ldots + (2003^{2003p})^{1-2003^{2003p}} \leqslant 2003.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Четврти разред – Б категорија

1. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$.

2. Доказати да функција $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$, не узима вредности између $\dfrac{1}{4}$ и 1.

3. Наћи све аритметичке прогресије код којих је однос збира првих n чланова и збира следећих $2n$ чланова $(n\in\mathbb{N})$ константа независна од n.

4. Доказати да једначина $ax^3+bx^2-1=0$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a>0$ има тачно једно позитивно решење.

5. Одредити висину ваљка максималне запремине уписаног у лопту полупречника $\sqrt{3}$.

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.