КВАЛИФИКАЦИОНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ СРБИЈЕ И ЦРНЕ ГОРЕ

Нови Сад, 20.04.2003.

1. Нека је $p(x)$ полином. Означимо

$$p^n(x) = \underbrace{p(p(\cdots p}_{n}(x)\cdots)).$$

Доказати да је полином $p^{2003}(x) - 2p^{2002}(x) + p^{2001}(x)$ дељив са $p(x) - x$.

2. Свака ивица и свака дијагонала конвексног n-тоугла ($n \geqslant 3$) је обојена црвеном или плавом бојом. Доказати да темена n-тоугла могу да се означе са $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тако да је један од следећа два услова задовољен:

1° дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ су исте боје;

2° за неко k, $1 < k < n$, дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k$ су плаве, док су дужи $A_kA_{k+1}, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ црвене.

3. Претпоставимо да су M и N различите тачке у равни троугла ABC такве да је

$$AM : BM : CM = AN : BN : CN.$$

Доказати да права MN садржи центар описаног круга троугла ABC.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

РЕШЕЊА

1. Познато је да $p(x)-x \mid k_n(x)=p^{n+1}(x)-p^n(x)$ за свако $n\in\mathbb{N}_0$: заиста, ако запишемо $p^n(x)=\sum_{i=0}^m a_ix^i$, онда је $k_n(x)=p^n(p(x))-p^n(x)=\sum_{i=0}^m a_i(p(x)^i-x^i)$, при чему $p(x)-x\mid p(x)^i-x^i$ за све i.

Зато је и $p^{2003}(x)-2p^{2002}(x)+p^{2001}(x)=k_{2002}(x)-k_{2001}(x)$ дељиво са $p(x)-x$.

2. Доказ изводимо индукцијом по n. За $n=3$ тврђење тривијално важи. Нека је $n>3$. Избацимо произвољно теме X: по индуктивној претпоставци, остала темена могу да се означе са $A_1,A_2,\dots,A_{n-1}$ тако да су дужи A_iA_{i+1} плаве за $1\leqslant i\leqslant k$, а црвене за $k<i\leqslant n-1$ (при чему је $A_n=A_1$).

Посматрајмо дуж XA_1. Ако је она плава, означимо тачке $X,A_1,\dots,A_{n-1}$ редом са $B_1,B_2,\dots,B_n$, а ако је црвена, означимо тако тачке $A_2,\dots,A_{n-1},A_1,X$ редом. Овако су, за неко ℓ ($0\leqslant\ell<n$), дужи B_iB_{i+1} плаве за $1\leqslant i\leqslant\ell$ и црвене за $\ell<i\leqslant n-1$.

Најзад, ако је дуж B_nB_1 црвена, означимо $A_i=B_i$ за све i, а ако је плава, означимо $A_i=B_{i-1}$ за $1\leqslant i\leqslant n$ (где је $B_0=B_n$). Овакво означавање задовољава услов задатка.

3. Тачке M и N су у пресеку Аполонијевих кругова $k_1(\frac{AX}{BX}=\frac{AM}{BM})$ и $k_2(\frac{AX}{CX}=\frac{AM}{CM})$ - они се очигледно не поклапају. Користимо следеће класично тврђење:

Лема. Аполонијев круг $k(\frac{AX}{BX}=r)$ је ортогоналан на произвољан круг Γ кроз A и B.

Доказ. Нека круг k сече дуж AB у тачки P и круг Γ у тачки C, и нека је O центар круга Γ. Из $\frac{AP}{BP}=\frac{AC}{BC}$ следи да је CP симетрала угла ACB. Центар S круга k је тачка на правој AB таква да је $SP=SC$, дакле $\sphericalangle SCO=\sphericalangle SPC+\sphericalangle PCO=90^\circ$, тј. CS је тангента на круг Γ, што значи да је $\Gamma\perp k$. $\square$

На основу леме, кругови k_1 и k_2 су нормални на описани круг Γ троугла ABC, па се инверзијом у односу на Γ сликају у себе. Дакле, ова инверзија слика тачке M и N једну у другу, и тврђење одмах следи.

Друго решење. По услову задатка је $\frac{MA}{NA}=\frac{MB}{NB}=\frac{MC}{NC}$, дакле, тачке A,B,C леже на истом Аполонијевом кругу у односу на тачке M и N, а центар тог круга је на правој MN.