МАЛА ОЛИМПИЈАДА

Нови Сад, 20. април 2003.

1. Нека је $p(x)$ полином. Означимо

$$p^n(x) = \underbrace{p(p(\cdots p}_{n}(x)\cdots)).$$

Доказати да је полином $p^{2003}(x) - 2p^{2002}(x) + p^{2001}(x)$ дељив са $p(x) - x$.

2. Свака ивица и свака дијагонала конвексног n-тоугла ($n \geq 3$) је обојена црвеном или плавом бојом. Доказати да темена n-тоугла могу да се означе са $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тако да је један од следећа два услова задовољен:

1° дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ су исте боје;

2° за неко k, $1 < k < n$, дужи $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k$ су плаве, док су дужи $A_kA_{k+1}, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ црвене.

3. Претпоставимо да су M и N различите тачке у равни троугла ABC такве да је

$$AM : BM : CM = AN : BN : CN.$$

Доказати да права MN садржи центар описаног круга троугла ABC.

Време за рад 3 *сата.*
Сваки задатак вреди 25 *поена.*