20. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Тирана, Албанија – 4. мај 2003.

1. Да ли постоји скуп B који се састоји од 4004 природна броја, такав да за сваки његов подскуп A који има 2003 елемента важи да збир елемената скупа A није дељив са 2003? *(Македонија)*

2. Нека је ABC троугао такав да важи $|AB| \neq |AC|$. Нека је D тачка пресека тангенте на описану кружницу троугла ABC у тачки A и праве BC. Нека су E и F тачке на симетралама дужи AB и AC редом такве да су BE и CF нормалне на BC. Доказати да су тачке D, E и F колинеарне. *(Румунија)*

3. Наћи све функције $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ које задовољавају следеће услове:

(1) $f(x+y)-yf(x)-xf(y)=f(x)f(y)-x-y+xy$ за свако $x,y\in\mathbb{Q}$;

(2) $f(x)=2f(x+1)+2+x$ за свако $x\in\mathbb{Q}$;

(3) $f(1)+1>0$. *(Кипар)*

4. Нека су m и n узајамно прости непарни природни бројеви. Правоугаоник $ABCD$ такав да је $|AB|=m$ и $|AD|=n$ подељен је на mn јединичних квадрата. Означимо са $A_1, A_2, \ldots, A_k$ узастопне пресечне тачке дијагонале AC са страницама јединичних квадрата $(A_1=A, A_k=C)$. Доказати да важи:

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}|A_jA_{j+1}|=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\ .$$

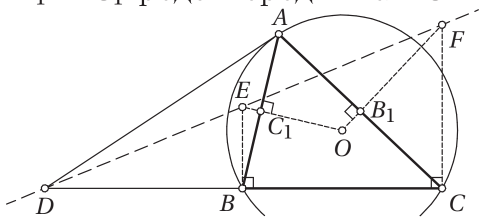
(Бугарска)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Постоји: довољно је узети скуп B који се састоји од 2002 броја облика $2003k$ и 2002 броја облика $2003k+1$. Заиста, ако 2003-елементни скуп $A \subset B$ садржи m елемената облика $2003k+1$ и $2003-m$ елемената облика $2003k$ (где је $1 \leqslant m \leqslant 2002$), онда је збир његових елемената конгруентан са m по модулу 2003.

2. Довољно је доказати да је $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{CF}$. Нека су B_1 и C_1 редом средишта AC и AB. Из сличности троуглова DBA и DAC добијамо $\frac{DB}{DA} = \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{AC}$, па је $\frac{DB}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. С друге стране, имамо $BE = \frac{BC_1}{\cos\sphericalangle ABE} = \frac{AB}{2\sin\sphericalangle B}$ и, слично, $CF = \frac{AC}{2\sin\sphericalangle C}$, па је $\frac{BE}{CF} = \frac{AB\sin\sphericalangle C}{AC\sin\sphericalangle B} = \frac{AB^2}{AC^2}$, и одатле следи тврђење.



3. Након сређивања, услов (1) постаје $f(x+y)+x+y = (f(x)+x)(f(y)+y)$. Тако сменом $g(x) = f(x)+x$ услови (1)-(3) постају

$$g(x+y) = g(x)g(y), \quad g(x+1) = \frac{1}{2}g(x), \quad g(1) > 0. \qquad (*)$$

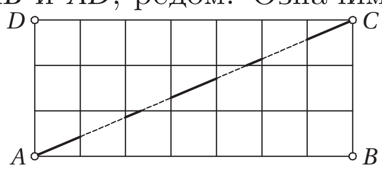
Даље, из $g(1) = g(1)g(0)$ добијамо $g(0) = 1$, а из $g(0) = g(x)g(-x)$ добијамо $g(x) \neq 0$. Приметимо да је $g(x) = g(\frac{x}{2})^2 > 0$ за све x. Ако ставимо $h(x) = \log_2 g(x)$, услови $(*)$ дају

$$\text{(а) } h(x+y) = h(x)+h(y) \quad \text{и} \quad \text{(б) } h(x+1) = h(x)-1.$$

Дакле, функција h задовољава Кошијеву једначину (а), одакле је $h(x) = x \cdot h(1)$ за $x \in \mathbb{Q}$, а (б) даје $h(1) = h(0)-1 = -1$. Према томе, $h(x) = -x$ и $f(x) = 2^{-x} - x$.

Лако се проверава да ова функција задовољава услове (1)-(3).

4. Поставимо координатне осе x и y дуж правих AB и AD, редом. Означимо са B_x тачку $(\frac{x}{n}, \frac{x}{m})$. Све тачке A_i припадају скупу $\{B_x \mid x = 0,1,\dots,mn\}$. Притом је број пресека полуотворене дужи $(AB_x]$ са страницама јединичних квадрата једнак $i(x) = [\frac{x}{m}] + [\frac{x}{n}]$, па дуж B_xB_{x+1} лежи на дужи $A_{i(x)+1}A_{i(x)+2}$. Према томе,



$$\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1}|A_jA_{j+1}| = \sum_{x=0}^{mn-1} (-1)^{i(x)}|B_xB_{x+1}| = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn} \cdot \sum_{x=0}^{mn-1} (-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]}.$$

Нека су r_x и s_x редом остаци при дељењу x са m и n. Приметимо да $[\frac{x}{m}] + [\frac{x}{n}]$ има исту парност као $r_x + s_x$, па како пар (r_x, s_x) за $x = 0,\dots,mn-1$ пролази кроз све могуће парове (a,b), $0 \leqslant a < m$, $0 \leqslant b < n$, добијамо

$$\sum_{x=0}^{mn-1} (-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]} = \sum_{x=0}^{mn-1} (-1)^{r_x+s_x} = \sum_{a=0}^{m-1} (-1)^a \cdot \sum_{b=0}^{n-1} (-1)^b = 1.$$