

5. Користећи само лењир и троугаоник одредити средиште дате дужи АВ. (Конструкцију образложи!)

A .

. B

6. Која од следећих тврђења су тачна? Заокружи их.

- а) Угао је пресек равни и полуравни;
- б) Унија два скупа увек садржи пресек та два скупа;
- в) Тежишна дуж је мања од сваке странице троугла;
- г) Око тупоуглог троугла не може се описати кружница.
- д) Раван је одређена са две прве;
- ђ) Дијагонале правоугаоника су једнаке;
- е) Висина једнакокраког троугла је и његова тежишна дуж;
- ж) Спољашњи угао троугла једнак је збиру два унутрашња угла

7. Обим једнакокраког трапеца износи 24 cm. Једна дијагонала тог трапеца дели његову средњу линију на одсечке од 3 cm и 5 cm.

- а) Колике су основице тог трапеца?
- б) Колики је крак тог трапеца?
- в) Одреди унутрашње углове трапеца.

Одговор: а) _____

б) _____

в) _____

8. Колики је полупречник кружнице описане око једнакокраког троугла чија је основица 6 и висина 1?

Одговор: _____

9. У равни размести 7 жетона у 6 праволинијских редова тако да у сваком реду буду по 3 жетона. Прикажи цртежом.

10. Нека је $PQRS$ квадрат уписан у правоугли троугао ABC , при чему су темена P и Q на хипотенузи BC , а темена R и S на страницама AC и AB . Ако је $BP = 9$ и $CQ = 4$, израчунати површину круга уписаног у квадрат $PQRS$.

Одговор: _____

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. а) Колико се пута напише цифра 5 када се испишу сви троцифрени бројеви?

Одговор: _____

- б) Могу ли се, користећи цифре 1, 4, 6 и 9, написати два природна броја, тако да један од њих буде 3 пута већи од другог?

Одговор: _____

12. а) Ако су p_1 и p_2 два узастопна проста броја за које се зна да је $p_1 + p_2 = 2n$, где $n \in \mathbb{N}$, докажи да је n сложен број.

Образложење:

- б) Докажи да се сваки прост број $p > 2$ може на јединствен начин представити као разлика два природна броја.

Образложење:

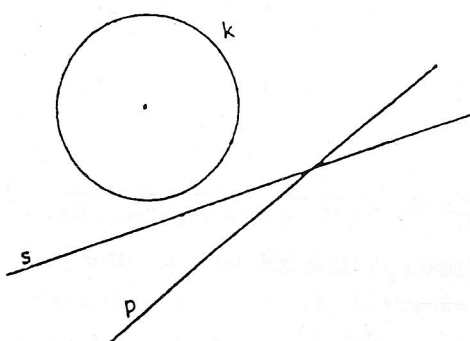
13. а) *Врач-погађач*: "Помножите број својих ципела са 2, добијеном производу додајте 39 и тако добијени збир помогите са 50, а онда томе додајте 53 и на крају одузмите од тога годину свог рођења. Погађам: Добили сте четвороцифрени број чије прве две цифре означавају број ваших ципела, а последње две цифре - број година које пуните у овој календарској години".

Проверите то на свом примеру. Објасните на чему се заснива ово погађање.

6) Код нас се дешавају чудне ствари. Ево, на пример, директор фирме "Магла комерц" недавно је изјавио да је његова фирма на крају прошле године имала добитак и поред чињенице да је за сваких 5 узастопних месеци током године имала губитак. Да ли је то могуће? Ако јесте наведи пример.

Одговор: _____

14. Дате су праве p и s и кружница k (као на слици). На правој p и кружници k наћи (конструкцијом) тачке које су једна другој симетричне у односу на праву s . Конструкцију образложи!



15. а) На хипотенузи AB правоуглог троугла ABC изабрана је произвољна тачка M и из ње су повучене нормале MK и MP на катете тог троугла. Где треба да се налази тачка M да би одсечак PK био најмањи?

Одговор: _____

б) Дат је троугао ABC са странама $AB=12$, $AC=8$, $BC=10$. На страници AC узета је тачка D на растојању 3 од темена A , на страници AB тачка E на растојању 6 од темена B . Наћи дужину дужи DE .

Одговор: _____

КРАЈ

17. мај 2003.

I разред - спец.

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. а) Упореди разломке $\frac{111110}{111111}$, $\frac{222221}{222223}$, $\frac{333331}{333334}$. Поређајте бих од најмањег до највећег.

Одговор: _____

б) Нека је $A = \frac{3^{2002} + 1}{3^{2003} + 1}$ и $B = \frac{3^{2003} + 1}{3^{2004} + 1}$. Шта је веће: А или В?

Одговор: _____

12. а) На колико начина се тројици ученика може поделити 16 истих оловака, тако да први добије тачно једну, а да сваки од остале двојице добије бар једну?

Одговор: _____

- б) Пре почетка трке на хиподрому четири гледаоца процењивала су шансе фаворита А, В и С.
- (1) "Трку ће добити А или С"
 - (2) "Ако А буде други, победиће В."
 - (3) "Ако А стигне трећи, онда С неће победити."
 - (4) Други ће стићи А или В".

После трке испоставило се да су три фаворита А, В и С заиста заузела прва три места, а све четири прогнозе гледалаца биле су тачне. Како су фаворити поделили прва три места?

Одговор: _____

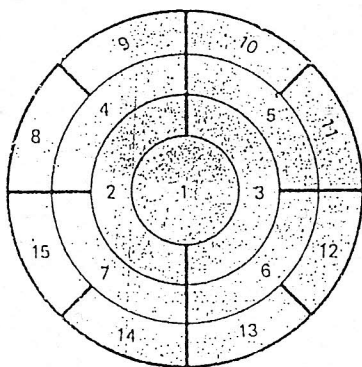
13. а) Објасните, постоје ли природни бројеви који имају следећа својства: при дељењу таквог броја са 3 остатак је 1, са 4 остатак је 2, са 5 остатак је 3, са 6 остатак је 4. Ако постоје такви бројеви, одредите који је најмањи такав број?

Одговор: _____

б) Са два различита природна броја врше се четири основне операције: (1) нађе се њихов збир; (2) од већег броја одузме се мањи; (3) нађе се њихов производ; (4) већи број се подели мањим. Резултати свих операција су сабрани и добијен број 243. Који су бројеви у питању?

Одговор: _____

14. Имамо четири концентричне кружнице и нека најмања од њих ограничава круг површине 1. Кружни прстен између најмање и следеће кружнице подељен је на два подударна дела (означена са 2 и 3). Следећи прстен подељен је на четири подударна дела (означена бројевима 4, 5, 6, 7). На крају, последњи прстен подељен је на 8 подударних делова са ознакама 8, 9, 10, ...14,15). Како треба изабрати полупречнике четири кружнице, да би свих 15 делова били једнаки по површини?

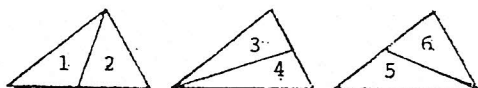


Одговор: $r_1 : r_2 : r_3 : r_4 =$ _____

15. а) Колико се укупно разних троуглова добије када се у троуглу повуку све три тежишне дужи? Нацртај слику!

Одговор: _____

б) Три подударна троугла разрезана су по разним тежишним дужима. Саставити један троугао од тако добијених 6 делова. Решење приказати цртежом..



II разред

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

1. Следеће бројеве написати (приказати) у стандардном облику, тј. у облику $a \cdot 10^n$, где је $1 \leq a < 10$ и $n \in \mathbb{Z}$.

- | | |
|---------------------------------|----------------|
| а) 150000000 | Одговор: _____ |
| б) 0,0013 | Одговор: _____ |
| в) $3,22 \cdot 10^3$ | Одговор: _____ |
| г) $534 \cdot 10^{-6}$ | Одговор: _____ |
| д) $1\frac{2}{3} \cdot 10^{-5}$ | Одговор: _____ |

2. Израчунати на најједноставнији начин:

(1) $\sin 2003\pi =$ Одговор: _____

(2) $\cos^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{\pi}{5} =$ Одговор: _____

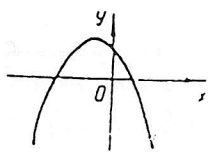
(3) $\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \pi =$ Одговор: _____

(4) $\sin 1080^\circ + \cos 720^\circ =$ Одговор: _____

(5) $\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 75^\circ =$ Одговор: _____

3. а) Који знак имају бројеви a , b , c , ако је на слици приказан график функције $y = ax^2 + bx + c$?

Заокружи слово испред тачног одговора.



- A) $a < 0, b > 0, c > 0$; B) $a < 0, b > 0, c < 0$;
C) $a > 0, b > 0, c < 0$; D) $a < 0, b < 0, c > 0$;
E) $a < 0, b < 0, c < 0$.

б) Колико има целих бројева који припадају скупу решења неједначине: $x^2 < 3x$?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4 F) безброј

Заокружи тачан одговор!

4. Које од наведених формула су тачне? Заокружи одговарајуће велико слово.

A) $\sqrt{x} = -x$ за $x < 0$; B) $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ за $x \neq 0$ и $y \neq 0$; C) $\log x^y = y \cdot \log x$;

D) $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$ за свако $x \in R$; E) $2^x = -8$ за $x = -3$;

5. а) Нађи a , ако је $a\sqrt{10} = 10\sqrt{a}$.

Одговор: _____

б) Реши једначину $\sqrt[3]{10000} = 10^x$

Одговор: _____

6. Дана је функција $y = f(x) = (x-a)^2 + 2a$, где је a реалан параметар.

Место за цртеж

а) Шта је график те функције?

Одговор: _____

б) Шта је геометријско место екстремума те функције када се a мења?

Нацртај га! Одговор: _____

в) На основу тога утврдити природу нула дате функције када a

варира од $-\infty$ до $+\infty$. Одговор: _____

7. а) Постоји ли неки цео број a за који је $a^2 + a + 1$ дељиво са 1000?

Одговор: _____

б) Доказати да израз $a^2 - 6a + 13$ позитиван за свако $a \in R$.

8. а) Докажи да је $x = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ цео број и нађи га.

Одговор: _____

б) За које вредности a је тачна доња једнакост ?

$$\sqrt{a^2 - 6a + 9} = 3 - a$$

Одговор: _____

9. а) Која веза постоји између a и b , ако је $a = \sin \alpha + \cos \alpha$ и $b = \sin \alpha - \cos \alpha$?

Одговор: _____

б) Ако се зна да је $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 2$ и $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 3$, наћи $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$.

Одговор: _____

10. Ако је $a \cdot \sin \beta + b \cdot \sin \alpha = 2 t_c$, где је t_c дужина тежишне дужи која одговара страници c , онда је тај троугао једнакокрак. Доказати.

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. а) Шта је веће: $\sqrt{2001} + \sqrt{2003}$ или $2\sqrt{2002}$? Утврдити без израчунавања корена.

Одговор: _____

б) Упрости израз (израчунај): $\sqrt{(2\sqrt{2} - 3)^2} - \sqrt{(2\sqrt{2} + 3)^2}$

Одговор: _____

12. а) О некој квадратној функцији знамо:

Место за график:

(1) $y = 0$ за $x = -1$;

(2) функција има највећу вредност 4 за $x = 1$.

Напиши формулу која изражава ту функцију и скицирај одговарајући график.

Место за рад :

Одговор: _____

6) За које вредности параметра a систем једначина

$$2x + y = a$$

$$x^2 + y = 2002$$

има јединствено решење?

Одговор: _____

13. У троуглу ABC угао A је два пута већи од угла B . Доказати да је $a^2 = bc + b^2$.

14. а) Упрости израз:

1) $\sqrt{(2-a)^2} =$ _____

2) $\sqrt{(a-1)^2} - \sqrt{a^2} =$ _____

6) Реши у скупу \mathbb{R} једначину: $\frac{x+|x|}{2x^2} = \frac{2x^2}{x+|x|}$.

Одговор: _____

15. Доказати да збир $\sin x + \cos x$ ни за које x не може бити једнак 1,5.

КРАЈ

Министарство просвете и спорта
КММ "АРХИМЕДЕС"-Београд
XXV МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР (СШ)

17. мај 2003.

Шифра: _____

Бодови: _____

II разред - спец.

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

*Ова група задатака иста је за све такмичаре II разреда.
Видети напред (2003. година, II разред, задаци 1-10).*

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. Ако се зна да је $a^2 + b^2 = 3ab$ и $a > b > 0$, израчунај $\frac{a+b}{a-b}$.

Одговор: _____

12. Ако је $a^2 - 4b$ тачан квадрат, а бројеви a и b природни, тада су и решења једначине $x^2 - ax + b = 0$ природни бројеви. Докажи!

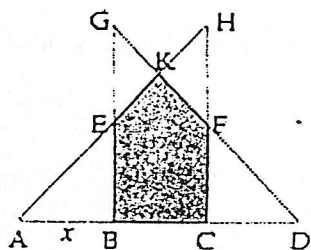
13. а) Израчунај збир: $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}} + \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots}}}}$

Одговор: _____

б) Израчунај збир: $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$

Одговор: _____

14. Два једнакокрако-правоугла троугла са катетом 1, постављена су у равни тако да се један пар катета налази на једној хоризонталној правој а троуглови су симетрични у односу на једну вертикалну праву. Колика је највећа могућа површина заједничког дела тих троуглова?



Одговор: _____

15. Реши једначину: $x(x+2)(x+3)(x+5) = 72$

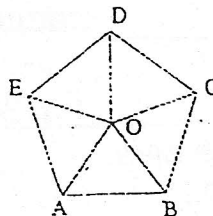
Одговор: _____

КРАЈ

III разред

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

1. а) ABCDE је правилни петоугао са страницом 1 и центром у тачки O. Наћи дужину вектора $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE}$



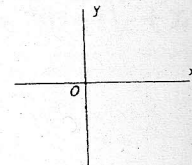
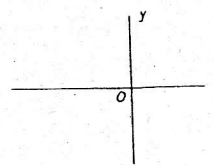
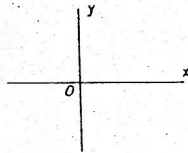
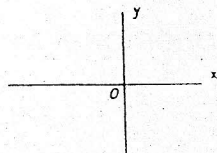
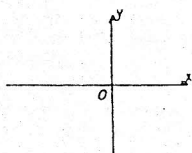
Одговор: _____

- б) Права $y=2x-1$ прсликана је симетрично у односу на апсцисну осу. Којом једначином се може приказати добијена права?

Одговор: _____

2. Нацртај (скицирај) графике који су задати следећим једначинама:

- а) $x^2+y^2=0$; б) $xy=0$; в) $x^2+y^2-2x-4y+5=0$; г) $x^2+4y^2=16$; д) $xy+1=x+y$;



3. а) Одреди у равни скуп свих тачака чије координате задовољавају услов $|x+y| \leq 1$.

- б) Израчунати површину фигуре која је у координтној равни одређена формулом

$$(2\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq 4(1 - \sqrt{xy}).$$

в) У координатној равни приказати скуп свих тачака (x, y) чије координате задовољавају формулу (неједначину): $\max \{ x^2 + y^2; 4x - 4y + 4 \} \leq 4$, тј. систем неједначина:
 $x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 4x - 4y + 4 \leq 4$.

4. Наћи угао између праве $p: x + 2y + 5 = 0$ и кружнице $k: x^2 + y^2 = 10$.

Одговор: _____

5. Доказати да је збир $1 + 2 + 3 + \dots + 2002 + 2003$ дељив са 2003.

6. а) Раван сече коцку, али не пролази ни кроз једно од њених темена. Колико ивица коцке може сећи та раван? Који од следећих одговора је тачан? Заокружи га.

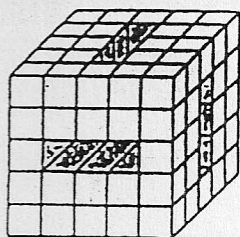
А) 3 или 4; Б) од 3 до 5; В) од 3 до 6; Г) од 3 до 7; Д) од 3 до 10.

б) Површина омотача правилне пирамиде је M . У којим границама мора бити површина P целе пирамиде?

А) $P > M$; Б) $P > 2M$; В) $M < P < 2M$; Г) $3M < P < 6M$

Образложи одговор:

7. Кроз велику коцку избушени су тунели, као што се види на слици. Колико је малих коцака остало од велике коцке?



Одговор: _____

8. а) Општи члан једног низа дат је формулом: $a_n = n^2 - 9$.

1) Напиши прва четири члана тог низа.

2) Одреди a_{997} и a_{2003} .

Одговор: 1) _____

2) _____

б) Један низ је задат на следећи начин: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n + 2$, где $n \in \mathbb{N}$, a_n - општи члан низа.

1) Напиши првих 5 чланова тог низа

2) Докажи да је низ аритметички

3) Нађи 1000-ти члан низа

4) Нађи збир првих 1000 чланова низа

Одговор: _____

9. Одреди 4 узастопна члана геометријске прогресије, ако је збир два крајња члана 65, а збир два средња је 20. (И. Њуџн)

Одговор: _____

10. Висина купе је 5 см. На растојању 2 см од врха пресечена је са равни која је паралелна основи. Нађи запремину купе, ако запремина одсеченог (мањег) дела износи 24 cm^2 .

Одговор: _____

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. Реални бројеви x и y су такви да је

$$x^3 + xy + y^2 = -1$$

$$y^3 + 2y + x^2 = 0.$$

Доказати да је $xy = 1$.

12. У скупу ненегативних целих бројева реши систем неједначина:

$$\begin{aligned}x + y &< 4, \\ 2x + 5y &> 10\end{aligned}$$

Одговор: _____

13. За које вредности параметра a овај систем једначина има три решења?

$$\begin{aligned}y - x^2 &= a \\ x^2 + y^2 &= 4\end{aligned}$$

Одговор: _____

14. Нека су a, b, c позитивни бројеви, такви да је $a^2 + b^2 = c^2$. Доказати да је тада $a^3 + b^3 < c^3$.
Дати и геометријско тумачење ове формуле.

15. Дрвена коцка је најпре обојена, а када се боја осушила разрезана на на једнаке коцкице.
Може ли се, при томе десити да буде исти број необојених коцкица као и коцкица којима је обојена само једна страна?
Образложење:

Одговор: _____

КРАЈ

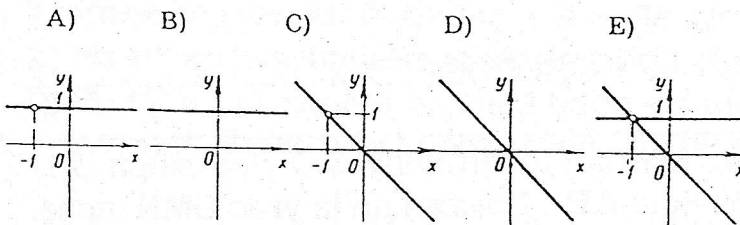
IV разред

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

1. Колико има бројева мањих од милион који се могу записати (у уобичајеном декадном систему) помоћу цифара 5 и 8?

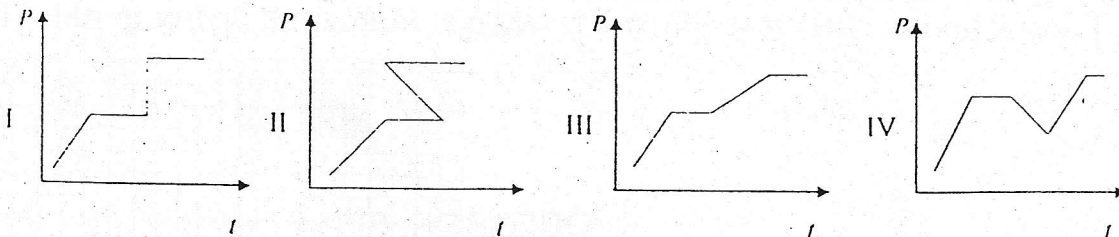
Заокружи тачан одговор:
 а) 12; б) 64; в) 126; г) 127.

2. Који од приказаних графика одговара једначини $\frac{y-1}{y+x} = 0$?



Одговор: _____

3. Који од ових графика приказује промену укупне количине падавина по m^2 (означену са P) у зависности од протеклог времена t , која може наступити у реалној ситуацији?



Одговор: _____

4. Која од наведених тврђења су тачна? Заокружи слово испред тачног тврђења.

- а) Функција $y = \frac{1}{x}$ дефинисана је за сваки реалан број.
- б) Функција $y = \sin x$ има безброј нула.
- в) Функција $y = x^2 - x$ је непрекидна за $x \in (0, 1)$
- г) Функција $y = |\log_2 x|$ има минимум..
- д) Функција $y = 2^{-x}$ је растућа на читавој области дефинисаности.

5. Дате су реалне функције: $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\frac{x^2}{x}$, $f_3(x)=\sqrt{x^2}$, $f_4(x)=(\sqrt{x})^2$.

Има ли међу датим функцијама међусобно једнаких? Образложи!

Одговор: _____

6. Дата је функција $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Скицирај график функције $f(f(f(x)))$.

7. Функција $f(x)$ има облик $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где су a, b, c, d неки бројеви.

Зна се да је $f(0)=1$, $f(1)=0$, $f(2)=3$. Чему је једнако $f(3)$? Одреди $f(x)$

Одговор: $f(3)=$ _____, $f(x)=$ _____

8. а) Одреди у координатној равни површину фигуре дефинисане неједначином

$$3xy + (x - \sqrt{xy} - y)(x + \sqrt{xy} - y) \leq 4$$

Одговор: _____

б) Колико има тачака са целобројним координатама које су у области дефинисаној формулом

$$|x| + |y| \leq 2?$$

Одговор: _____

9. Наћи а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} =$ _____

б) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} =$ _____

10. У једној улици има 8 кућа. Где треба изградити продавницу да би збир растојања од кућа до продавнице био најмањи?

Одговор: _____

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. Колико има природних бројева већих од 2000 а мањих од 5000, које можемо написати помоћу цифара 0,1,2,3,4 и 5, ако се:

- а) цифре смеју понављати;
- б) цифре не смеју понављати?

Одговор: а) _____

б) _____

12. а) Одреди вредности коефицијената a и b и нацртај график функције

$$y = a|x-1| + x + b,$$

ако се зна да том графику припадају тачке $A(4,7)$ и $P(2,1)$.

Одговор: _____

б) Одреди површину фигуре коју у координатној равни одређују неједначине:

$$x^2 + y^2 \leq 4(x + y - 1),$$

$$y \leq |x - 2|$$

Одговор: _____

13. Доказати да је за свако x испуњена једнакост

$$||x-2|-1| = ||x-1|-1|-1|.$$

14. У конвексном n -тоуглу повучене су све дијагонале, при чему се никоје три не секу у истој тачки. Колики је број свих пресечних тачака повучених дијагонала које су унутар многоугла?

Одговор: _____

15. Два стрелца гађају истовремено у исту metu (независно један од другог), при чему први погађа metu с вероватноћом 0,7, а други са вероватноћом 0,8. Колика је вероватноћа да мета буде бар једном погођена?

Одговор: _____

КРАЈ

Министарство просвете и спорта
КММ "АРХИМЕДЕС" - Београд
XXV МАТЕМАТИЧКИ ТУРНИР (СШ)

17. мај 2003.

Шифра: _____

Бодови: _____

IV разред - спец.

Прва група задатака (сваки задатак 5 бодова)

*Ова група задатака иста је за све такмичаре IV разреда.
Видети напред (2003. година, IV разред, задаци 1-10).*

Друга група задатака (сваки задатак 10 бодова)

11. Нацртај график функције $y=f(x)=|x^2-x-6|+2x-6$, па помоћу њега одреди скуп вредности функције $f(x)$ и све целобројне вредности које функција постиже 4 пута.

Одговор: Скуп вредности функције: _____

Тражене целобројне вредности: _____

12. Одреди површину фигуре коју у координатној равни чине све тачке чије координате (x, y) задовољавају неједначине:

$$\begin{aligned} |x-1| + |y-1| &\geq 1, \\ |x-2| + |y-2| &\leq 2. \end{aligned}$$

Одговор: _____

13. На колико различитих начина се може прочитати реч СРБИЈА на слици?

С
Р Р
Б Б Б
И И И И
Ј Ј Ј Ј Ј
А А А А А А

Одговор: _____

14. У правоугаоној табlici 20×10 (20 колона, 10 стубаца) записани су бројеви. У свакој врсти бирамо најмањи број и међу њима (најмањима у свакој врсти) бирамо највећи. У сваком ступцу бирамо највећи број и међу њима (највећима у свакој врсти) бирамо најмањи. Који од тих бројева је већи (ако су то различити бројеви)?

Образложење:

Одговор: _____

15. На случајан начин бирају се бројеви a и b , при чему је $0 < a \leq 1$, $0 < b \leq 1$ и узима се $c=1$. Посматрајмо троугао са странама a, b, c . Случајеви када није испуњена неједнакост троугла $a+b > c$ се искључују. Колика ја вероватноћа да ће добијени троугао бити тупоугли?

Одговор: _____

КРАЈ