42. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Бечићи, 20.04.2002.

Први разред

1. Одредити све реалне бројеве x за које важи

$$\frac{2002[x]}{[-x]+x} > \frac{[2x]}{x-[1+x]}\,.$$

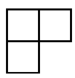
2. Нека је O унутрашња тачка троугла ABC и нека праве AO, BO и CO секу странице BC, CA и AB редом у тачкама A_1, B_1 и C_1. Ако је AA_1 највећа од дужи AA_1, BB_1 и CC_1, доказати да је

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 \leqslant AA_1\,.$$

3. Одредити све парове природних бројева (n, k) за које важи

$$\binom{n}{k} = 2002\,.$$

4. Да ли се правоугаоник 2001×2003 може исећи на фигуре облика



које се састоје од три јединична квадрата?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

42. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Бечићи, 20.04.2002.

Други разред

1. Нека су x, y и z реални бројеви за које важи

$$x^2 \leqslant y+z, \quad y^2 \leqslant z+x, \quad z^2 \leqslant x+y.$$

Одредити најмању и највећу могућу вредност за z.

2. Нека су $A_0, A_1, \ldots, A_{2k}$, тим редом, тачке кружнице, које је деле на $2k+1$ једнаких лукова. Тачка A_0 спојена је тетивама са свим осталим тачкама. Тих $2k$ тетива деле круг на $2k+1$ делова. Ти делови обојени су наизменично црвеном и плавом бојом, тако да је број црвених делова за један већи од броја плавих делова.

Доказати да је плава површина већа од црвене.

3. Нека су m и n природни бројеви. Доказати да је број $2^n - 1$ дељив са $(2^m - 1)^2$ ако и само ако је број n дељив са $m(2^m - 1)$.

4. Сваки од петнаест фудбалских тренера рангирао је 50 изабраних фудбалера на места од 1 до 50. За сваког фудбалера разлика између највишег и најнижег места на које је био рангиран није већа од 5. Такође, за сваког фудбалера одређен је збир редних бројева места на која је био рангиран. Тако су добијени збирови $S_1 \leqslant S_2 \leqslant \ldots \leqslant S_{50}$.

Одредити највећу могућу вредност збира S_1.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

42. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Бечићи, 20.04.2002.

Трећи и четврти разред

1. Нека су a, b и c позитивни, а m и n природни бројеви. Доказати да важи

$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \geqslant a^k + b^k + c^k.$$

2. Нека је низ $(f_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $f_1 = f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \geqslant 1$. Доказати да је површина троугла чије су странице дужине $\sqrt{f_{2n+1}}, \sqrt{f_{2n+3}}$ и $\sqrt{f_{2n+5}}$ једнака $\dfrac{1}{2}$.

3. Нека је $ABCD$ ромб код кога је $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Тачке S и R, редом, леже унутар троуглова ABD и DBC, тако да је $\sphericalangle SBR = \sphericalangle RDS = 60^\circ$. Доказати да важи $SR^2 \geqslant AS \cdot CR$.

4. Да ли постоји природан број k такав да се цифре 3,4,5 и 6 не појављују у декадном запису броја $2002! \cdot k$?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

РЕШЕЊА

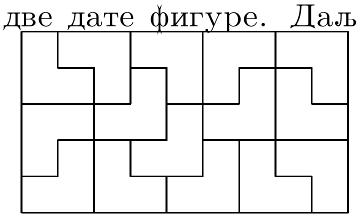
1.1. Број x не може бити цео јер би у супротном било $x+[-x]=0$ и лева страна не би била дефинисана. Зато је $x+[-x]=x-[1+x]=1-\{x\}<0$, па се дата неједначина своди на $2002[x]<[2x]$. Ако је $x<0$, ова неједнакост је задовољена. Ако је $0<x<1$, мора бити $[2x]>0$, тј. $\frac{1}{2}<x<1$. Према томе, решење је $x\in(\frac{1}{2},1)\cup(-\infty,0)\setminus\mathbb{Z}$.

1.2. Однос површина троуглова OBC и ABC једнак је односу њихових висина из O и A, а он је једнак $x=\frac{OA_1}{AA_1}$. Слично је $y=\frac{OB_1}{BB_1}=\frac{P_{AOC}}{P_{ABC}}$ и $z=\frac{OC_1}{CC_1}=\frac{P_{AOB}}{P_{ABC}}$. Сабирањем добијамо $x+y+z=1$. Сада је

$$OA_1+OB_1+OC_1=x\cdot AA_1+y\cdot BB_1+z\cdot CC_1\leqslant(x+y+z)AA_1=AA_1.$$

1.3. Пошто је $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, можемо да претпоставимо да је $k\leqslant\frac{n}{2}$. За почетак, мора бити $n\geqslant 13$ јер $13\mid 2002$. Ако је $k\geqslant 4$, онда је $\binom{n}{4}\leqslant\binom{n}{k}=2002<\binom{17}{4}=2380$, па је $n\in\{13,14,15,16\}$. Провером налазимо $\binom{14}{5}=2002$. За $k\leqslant 3$, једначине $\binom{n}{3}=2002$ и $\binom{n}{2}=2002$ немају решења, па мора бити $k=1$, и тада је $n=2002$.
Једина решења су $\binom{2002}{1}=\binom{2002}{2001}=\binom{14}{5}=\binom{14}{9}=2002$.

1.4. Правоуаоник 2×3 се може исећи на две дате фигуре. Даље, на на слици је показано да се и правоугаоник 5×9 може исећи на такве фигуре. Како се правоугаоник 2001×2003 може исећи на правоугаонике 2001×1992, 1995×9 и 6×9, при чему се први и трећи могу поделити на правоугаонике 2×3, а други на правоугаонике 5×9, следи да је одговор *да*.

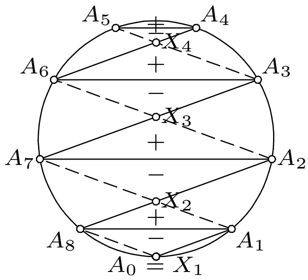


2.1. Нека су $a\leqslant b\leqslant c$ бројеви x,y,z у растућем поретку. По услову задатка је $c^2\leqslant a+b\leqslant 2c$, па је $z\leqslant c\leqslant 2$. С друге стране је $z\geqslant a\geqslant c^2-b\geqslant c^2-c\geqslant-\frac{1}{4}$.
Вредности $z=2$ и $z=-\frac{1}{4}$ се достижу за тројке $(x,y,z)=(2,2,2)$ и $(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$.

2.2. За $j=1,2,\dots,2k+1$, j-ти део P_j се састоји од троугла $A_0A_{j-1}A_j$ ($A_{2k+1}=A_0$) и кружног одсечка површине S са централним углом $\frac{2\pi}{2k+1}$. Дакле,

$$\begin{aligned}P_{2i-1}-P_{2i} &= [A_0A_{2i-2}A_{2i-1}]-[A_0A_{2i-1}A_{2i}]\\ &= [A_{i-1}A_iA_{2k+2-i}]-[A_{i-1}A_iA_{2k+1-i}]\\ &= [X_iA_{i-1}A_{2k+2-i}]-[X_iA_iA_{2k+1-i}]\\ &= [X_iA_{i-1}A_{2k+2-i}]-[X_{i+1}A_iA_{2k+1-i}],\end{aligned}$$

где је $X_i=A_{i-1}A_{2k+1-i}\cap A_iA_{2k+2-i}$. Сабирањем по $i=1,\dots,k$ добијамо $D = P_1 - P_2 + \cdots + P_{2k-1} - P_{2k} + P_{2k+1} = S - [X_k A_k A_{k+1}]$. Ако се тангенте на круг у тачкама A_k и A_{k+1} секу у тачки T, онда је $S < [TA_k A_{k+1}] = [X_k A_k A_{k+1}]$, дакле $D < 0$, што је и требало показати.



2.3. Из $2^m - 1 \mid 2^n - 1$ следи $m \mid n$. Нека је $n = km$. Тада је

$$\frac{2^n - 1}{2^m - 1} = 2^{(k-1)m} + 2^{(k-2)m} + \cdots + 2^m + 1 \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 = k \pmod{2^m - 1},$$

а то је дељиво са $2^m - 1$ ако и само ако $2^m - 1 \mid k$, одакле следи тврђење.

2.4. Нека је n број фудбалера које је бар један тренер рангирао на прво место. Редни бројеви на које су ови фудбалери били пласирани не прелазе 6, па је укупан збир ових редних бројева не већи од $15(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(7-k)) = 15(1 + \frac{1}{2}(n-1)(14-n)) = \frac{15}{2}(15n - n^2 - 12)$. Следи да бар један од ових фудбалера има збир редних бројева не већи од $\frac{15}{2}(15 - n - \frac{12}{n})$, а то је највеће за $n \in \{3, 4\}$ када је једнако 60. Дакле, $S_1 \leqslant 60$.

Пример са $S_1 = 60$ се добија када су три играча рангирана по пет пута као 1-ви, 5-ти и 6-ти, три играча по пет пута као 2-ги, 3-ћи и 7-ми, и три по пет пута као 4-ти, 8-ми и 9-ти: тада је $S_1 = S_2 = \cdots = S_6 = 60$ и $S_7 = S_8 = S_9 = 105$.

3.1. По тежинској А-Г неједнакости је

$$\frac{k}{n+k} \cdot \frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{n}{n+k} \cdot b^k \geqslant \left(\frac{a^{n+k}}{b^n}\right)^{\frac{k}{n+k}} \cdot \left(b^k\right)^{\frac{n}{n+k}} = a^k,$$

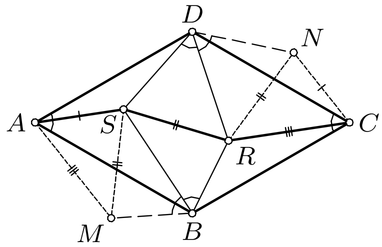
тј. $\frac{a^{n+k}}{b^n} \geqslant \frac{n+k}{k} a^k - \frac{n}{k} b^k$. Сабирањем са аналогним двема неједнакостима добијамо тражену. Једнакост важи само за $a = b = c$.

3.2. Означимо $f_{2n+1}, f_{2n+2}, \ldots, f_{2n+5}$ редом са a, b, c, d, e. Површина троугла је $P = \frac{1}{4}\sqrt{2ac + 2ae + 2ce - a^2 - c^2 - e^2}$ по Хероновом обрасцу. Заменом $a = c - b$ и $e = c + d = 2c + b$ добијамо $P = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 - bc - b^2}$.

Остаје да докажемо индукцијом по k да је $g_k = f_{k+1}^2 - f_k f_{k+1} - f_k^2 = (-1)^k$. Ово следи из $g_0 = 1$ и $g_{k+1} = f_{k+2}(f_{k+2} - f_{k+1}) - f_{k+1}^2 = (f_{k+1} + f_k) f_k - f_{k+1}^2 = -g_k$.

3.3. Нека су M и N редом тачке симетричне тачкама R и S у односу на праве BS и DR. Тада је $\sphericalangle RBM = 2\sphericalangle RBS = 120^\circ$ и $BM = BR$, па је троугао BMA слика троугла BRC при ротацији за 120°.

Следи да је $AM = CR$. Слично важи $CN = AS$, а такође је и $MS = RS = RN$, па су троуглови ASM и CNR подударни. Између осталог, $\sphericalangle MAS = \sphericalangle NCR$.



С друге стране, $\sphericalangle MAS = 60^\circ + \sphericalangle BAM - \sphericalangle DAS = 60^\circ + \sphericalangle BCR - \sphericalangle DAS$, и аналогно $\sphericalangle NCR = 60^\circ - \sphericalangle BCR + \sphericalangle DAS$. Одавде следи да је $\sphericalangle BCR = \sphericalangle DAS$, тј. $\sphericalangle MAS = 60^\circ$. Сада косинусна теорема даје $RS^2 = SM^2 = AS^2 + AM^2 - AS \cdot AM \geqslant AS \cdot AM = AS \cdot CR$.

3.4. Постоје два степена десетке, 10^m и 10^n $(m > n)$, који дају исти остатак при дељењу са 2002!. Тада $2002! \mid 10^m - 10^n = 99\dots 900\dots 0$.