Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Први разред – А категорија

1. Ако је n природан број, доказати да $3n^2 + 3n + 7$ није куб ниједног природног броја.

2. У троуглу ABC је $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Нека су D и E редом пресечне тачке симетрала углова $\sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle BCA$ са наспрамним страницама, а S центар уписаног круга тог троугла. Доказати да је $SD = SE$.

3. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за свако реално x важи

$$f(x+1) \leqslant x \leqslant f(x) + 1.$$

4. Дат је скуп $S = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Колико највише елемената може имати његов подскуп A са следећим својством: ако $x \in A$, онда $2x \notin A$?

5. На рукометном турниру, свака екипа је одиграла по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. За победу се добијају 2 поена, за пораз 0, а за нерешен резултат свака екипа добија по 1 поен. Три најбоље пласиране екипе имале су 7, 5 и 3 поена. Колико је на турниру учествовало екипа и колико је поена имала последњепласирана од њих? (Ако две екипе имају једнак број поена, место се одређује на основу разлике броја датих и примљених голова.)

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Други разред – А категорија

1. Дати су реални бројеви x и y такви да је $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=\sqrt{2002}$. Колико је $-xy-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$?

2. Дате су квадратне једначине

$$x^2+\frac{8}{a}x-1a=0, \qquad x^2+\frac{6}{a}x-a=0.$$

Одредити све вредности реалног параметра a за које су сва четири корена ових двеју једначина реална и међусобно различита, и при томе се тачно један корен прве једначине налази између корена друге.

3. Дат је квадрат $ABCD$. Нека је F средиште странице AD, а L тачка на дужи BC таква да је $BL:LC=1:2$. Дијагонала BD сече дужи AL и CF у тачкама P и Q редом. Доказати да су троуглови BLP и DQF слични.

4. Нека су a,b,c дужине страница троугла, α,β,γ одговарајући углови, а S површина троугла ABC. Доказати да важи једнакост:

$$a^2(\sin 2\beta+\sin 2\gamma)+b^2(\sin 2\alpha+\sin 2\gamma)+c^2(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=12S.$$

5. Наћи целе бројеве a и b тако да важи

$$\left(1+\frac{1+i}{2}\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^2}\right)\cdots\left(1+\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2^{2002}}\right)=(1+i)\left(a+\frac{b}{2^{2^{2002}}}\right).$$

(i је имагинарна јединица: $i^2=-1$.)

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Трећи разред – А категорија

1. Миљан воли шестоцифрене бројве код којих је збир прве три цифре једнак збиру последње три, а Младен оне код којих је збир цифара на непарним местима једнак збиру цифара на парним местима. Колико има шестоцифрених бројева које воле и Миљан и Младен?

2. Решити неједначину $\log_x \dfrac{12-4x}{4-x} \leqslant 1$.

3. У оштроуглом троуглу ABC, P и Q су подножја висина из темена A и C редом. Површине троуглова ABC и BPQ су 18 и 2 редом, а $PQ = 2\sqrt{2}$. Наћи полупречник круга описаног око $\triangle ABC$.

4. За које вредности реалног параметра p једначина

$$(x-p)^2(p(x-p)^2 - p - 1) = -1$$

има више позитивних него негативних решења?

5. Доказати да не постоје природни бројеви a, b, c, d такви да је

$$a^a + b^b + c^c = d^d.$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Четврти разред – А категорија

1. Нека је A коначан подскуп скупа природних броејва који садржи више од седам елемената. Најмањи заједнички садржалац свих бројева из A је 210. У скупу A нема парова узајамно простих бројева, а производ свих његових елемената је дељив са 1920 и није квадрат неког природног броја. Одредити скуп A.

2. Дат је правоугли троугао ABC ($\sphericalangle C = 90°$) и тачке D, E на страници BC такве да је $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAE = \sphericalangle EAC$. Ако је $BD = 2CE$, израчунати углове троугла ABC.

3. На параболи $y^2 = 2x$ наћи тачку најближу тачки $(1, 4)$.

4. Дат је трапез $ABCD$ са основицама $AD = a$ и $BC = b$, $a > b$. Нека су B_1 и C_1 средишта његових дијагонала. У четвороуглу AB_1C_1D опет уочимо средишта дијагонала - тачке B_2 и C_2. Овај поступак настављамо, и у n-том кораку означимо са B_n и C_n средишта дијагонала четворооугла $AB_{n-1}C_{n-1}D$.

а) Наћи дужину дужи B_nC_n.

б) Израчунати $\lim_{n\to\infty} |B_nC_n|$.

в) Какав треба да буде трапез $ABCD$ да би све дужи B_nC_n биле међусобно једнаке?

5. Доказати да не постоје природни бројеви a, b, c, d такви да је

$$a^a + b^b + c^c = d^d.$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Први разред – Б категорија

1. У једном одељењу има 30 ученика. На такмичењу из математике учествује њих 24, на такмичењу из физике 22 и на такмичењу из информатике 20 ученика. Доказати да бар 6 ученика учествује на сва три такмичења.

2. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. За свако $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ важи

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) - 2f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 2002x.$$

Израчунати $f(2)$.

3. Ако је n непаран цео број, доказати да је $n(n^{2002} - 1)$ дељиво са 24.

4. Колико има парова троцифрених бројева чији је производ написан само цифрама 3?

5. На рукометном турниру, свака екипа је одиграла по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. За победу се добијају 2 поена, за пораз 0, а за нерешен резултат свака екипа добија по 1 поен. Три најбоље пласиране екипе имале су 7, 5 и 3 поена. Колико је на турниру учествовало екипа и колико је поена имала последњепласирана од њих? (Ако две екипе имају једнак број поена, место се одређује на основу разлике броја датих и примљених голова.)

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Други разред – Б категорија

1. Да ли је број $\dfrac{(1+\sqrt[5]{3}-\sqrt[5]{9})^3}{2-\sqrt[5]{27}}$ рационалан? Образложити одговор.

2. Дата је неједначина $x^2+ax-1<0$. Одредити све вредности реалног параметра a такве да скуп решења те неједначине буде интервал дужине 5.

3. Дати су позитивни бројеви a,b,c. Доказати да не могу истовремено бити испуњене све три неједнакости

$$a(1-b)>\frac{1}{4},\quad b(1-c)>\frac{1}{4},\quad c(1-a)>\frac{1}{4}.$$

4. Наћи све комплексне бројеве z за које важи $\bar{z}=z^3$.

5. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао чије се дијагонале секу у тачки S под правим углом. Ако је H подножје нормале из S на AD, а X пресек правих SH и BC, доказати да је тачка X средиште дужи BC.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Трећи разред – Б категорија

1. Миљан воли шестоцифрене бројве код којих је збир прве три цифре једнак збиру последње три, а Младен оне код којих је збир цифара на непарним местима једнак збиру цифара на парним местима. Колико има шестоцифрених бројева које воле и Миљан и Младен?

2. Решити неједначину $\log_x \dfrac{12-4x}{4-x} \leqslant 1$.

3. Решити једначину $6 \cdot 9^{\frac{1}{\sin x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{\sin x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{\sin x}} = 0$.

4. Израчунати запремину тростране пирамиде ако је једна њена ивица дужине 4 cm, а све остале дужине 3 cm.

5. Шта је веће: $\arcsin(\sin 10)$ или $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-3))$? Образложити одговор.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

09.02.2002.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека је $\mathcal{S} = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\left(\frac{z-6i}{z+8}\right) = 0 \right\}$. Доказати да постоји кружница k у рацни комплексних бројева таква да је $\mathcal{S} \subset k$. Да ли је $\mathcal{S} = k$?

2. Решити неједначину $\log_x \frac{12-4x}{4-x} \leqslant 1$.

3. На параболи $y^2 = 2x$ наћи тачку најближу тачки $(1, 4)$.

4. Одредити константе a, b, c тако да за сваки природан број n важи

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \cdots + \frac{n}{5^n} = a + \frac{bn+c}{16 \cdot 5^n}\,.$$

5. Израчунати

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)}\right).$$

Време за рад 180 минута.