43. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Глазгов, Велика Британија – среда, 24. јул 2002.

1. Нека је n природан број и T скуп тачака (x, y) у равни таквих да су x и y ненегативни цели бројеви и $x + y < n$. Свака тачка скупа T обојена је црвено или плаво. Ако је тачка (x, y) обојена црвено, такве су и све тачке (x', y') скупа T за које је истовремено $x' \leqslant x$ и $y' \leqslant y$. Скуп од n плавих тачака назива се X-*скуп* ако имају различите x-координате, а скуп од n плавих тачака назива се Y-*скуп* ако имају различите y-координате. Доказати да је број X-скупова једнак броју Y-скупова. *(Колумбија)*

2. Нека је BC пречник кружнице k чији је центар O, A тачка на k таква да је $0^\circ < \sphericalangle AOB < 120^\circ$, а D средиште лука AB кружнице k који не садржи тачку C. Нека права која садржи тачку O и која је паралелна са DA сече праву AC у J. Нека симетрала дужи OA сече k у E и F. Доказати да је J центар кружнице уписане у троугао CEF. *(Јужна Кореја)*

3. Одредити све парове (m, n) природних бројева $(m, n \geqslant 3)$, тако да је

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

природан број за бесконачно много природних бројева a. *(Румунија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

43. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Глазгов, Велика Британија – четвртак, 25. јул 2002.

4. Нека је $n > 1$ природан број и нека су $d_1, d_2, \ldots, d_k$ сви позитивни делиоци броја n, при чему је

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Нека је $D = \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{i+1}$.

а) Доказати да је $D < n^2$.

б) Одредити све n за које је D делилац броја n^2. *(Румунија)*

5. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$\big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz),$$

за све реалне x, y, z, t. *(Индија)*

6. Нека су $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(n \geqslant 3)$ кружнице полупречника 1 у равни. Нека су центри тих кружница $O_1, O_2, \ldots, O_n$, редом. Ако ниједна права нема заједничких тачака са више од две уочене кружнице, доказати да је

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{O_i O_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

(Украјина)

Language: Serbian

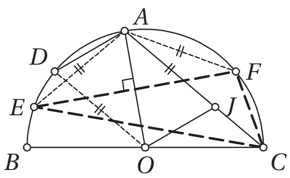
Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Нека је a_i број плавих тачака на правој $x = i$, а b_i број плавих тачака на правој $y = i$. Треба да докажемо да је $a_0 a_1 \cdots a_{n-1} = b_0 b_1 \cdots b_{n-1}$. У ствари, доказаћемо да је низ $a_0, \dots, a_{n-1}$ пермутација низа $b_0, \dots, b_{n-1}$.

Тврђење доказујемо индукцијом по броју црвених тачака. База индукције (када су све тачке плаве) је тривијална. Уочимо сада црвену тачку (x, y) са највећим збиром $x + y$: тада је $a_x = b_y = n - x - y - 1$. Ако ову тачку пребојимо у плаво, a_x и b_y ће се смањити за 1. По индуктивној претпоставци, $a_0, \dots, a_x - 1, \dots, a_{n-1}$ је пермутација $b_0, \dots, b_y - 1, \dots, b_{n-1}$, и индуктивни корак одмах следи.

2. Пошто је $\sphericalangle BCA = \frac{1}{2} \sphericalangle BOA = \sphericalangle BOD$, праве CA и OD су паралелне, па је $JADO$ паралелограм. Одавде је $AJ = OD = OE = AE = AF$, па имамо



$$\sphericalangle JFE = \sphericalangle JFA - \sphericalangle EFA = \sphericalangle AJF - \sphericalangle ECA = \sphericalangle AJF - \sphericalangle ACF = \sphericalangle CFJ.$$

Из $AE = AF$ следи и да CJ полови $\sphericalangle ECF$, па је J центар уписаног круга $\triangle CEF$.

3. Нека је $R(x)$ остатак при дељењу полинома $F(x) = x^m + x - 1$ са $G(x) = x^n + x^2 - 1$. За бесконачно много x, $R(x)$ је дељиво са $G(x)$, али пошто је $\deg R < \deg G$, за свако довољно велико $|x|$ ће важити $|R(x)| < |G(x)|$, па тада мора бити $R(x) = 0$. Дакле, $R \equiv 0$, тј. полином $F(x)$ је дељив са $G(x)$.

Полином $H(x) = x^{m-n} G(x) - F(x) = x^{m-n+2} - x^{m-n} - x + 1$ је дељив са $G(x)$ и очигледно $\frac{H(x)}{G(x)}$ није константа, па имамо $\deg H \geqslant \deg G + 1$, тј. $m \geqslant 2n - 1$.

С друге стране, полином $G(x)$ има бар једну нулу $\alpha \in (0,1)$ јер је $G(0) = -1$ и $G(1) = 1$. Тада је такође $F(\alpha) = 0$, тј. $\alpha^m + \alpha = \alpha^n + \alpha^2 = 1$. Ако је $m \geqslant 2n$, онда је $1 - \alpha = \alpha^m \leqslant (\alpha^n)^2 = (1 - \alpha^2)^2$, што је еквивалентно са $\alpha(1 - \alpha)(\alpha^2 + \alpha - 1) \leqslant 0$, али то је немогуће јер је $\alpha^2 + \alpha - 1 > \alpha^m + \alpha - 1 = 0$. Дакле, $m = 2n - 1$.

Према томе, за неко $a \in \mathbb{Z}$ имамо $H(x) = (x - a)G(x) = x^{n+1} - a x^n + x^3 - a x^2 - x + a$. Сада лако добијамо $a = 1$ и $(n, m) = (3, 5)$.

Напомена. Испоставља се да је полином $x^n \pm x^k \pm 1$ или иредуцибилан, или једнак иредуцибилном полиному помноженом са $x^2 \pm x + 1$.

4. Пошто је $\frac{d_i}{n} = \frac{1}{d_{k+1-i}}$, имамо $\frac{D}{n^2} = \frac{1}{d_k d_{k-1}} + \cdots + \frac{1}{d_2 d_1}$. Одавде следи

$$\frac{1}{d_2 d_1} \leqslant \frac{D}{n^2} \leqslant \left(\frac{1}{d_{k-1}} - \frac{1}{d_k}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = 1 - \frac{1}{d_k} < 1,$$

тј. $d_1 = 1 < \frac{n^2}{S} \leqslant d_2$. Дакле, $D < n^2$.

Ако D дели n^2, по претходном мора бити $\frac{n^2}{D} = d_2$ и $k = 2$, што значи да је n прост број.

5. Заменом $x = z = 0$ и $t = y$ у дату једначину $(*)$ добијамо $4f(0)f(y) = 2f(0)$. Ако је $f(0) \neq 0$, следи да је $f(y) = \frac{1}{2}$ за све y.

Нека је сада $f(0) = 0$. Заменом $z = t = 0$ добијамо

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{за све } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Ако је $f(y) = 0$ за неко $y \neq 0$, одавде следи да је f идентички 0. Надаље сматрамо да је $f(y) \neq 0$ за све $y \neq 0$. Приметимо да из (1) следи $f(x) = f(\sqrt{x})^2 > 0$ за све $x > 0$, па $(*)$ за $t = x$ и $z = y$ даје $f(x^2 + y^2) = (f(x) + f(y))^2 \geqslant f(x^2)$ за све $x, y \geqslant 0$. Дакле, функција f је строго растућа на $\mathbb{R}^+$.

Из (1) следи $f(1) = 1$. Убацивањем $t = y$ у $(*)$ и скраћивањем $f(y)$ на основу (1) добијамо

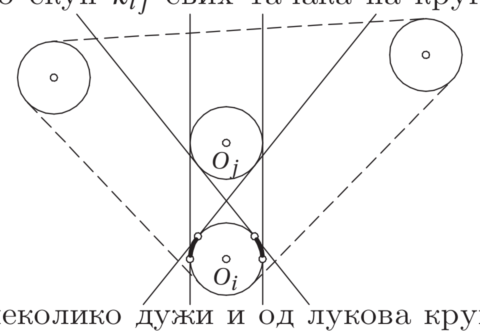
$$2(f(x) + f(z)) = f(x - z) + f(x + z) \quad \text{за све } x, z. \tag{2}$$

Између осталог, $f(z) = f(-z)$. Даље, из (2) се лако добија индукцијом да је $f(nx) = n^2 f(x)$ за све $n \in \mathbb{N}$, а одатле је $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n^2} f(m) = (\frac{m}{n})^2$ за све рационалне бројеве $\frac{m}{n}$. Најзад, како је f растућа за $x > 0$, мора бити $f(x) = x^2$ за све x.

Лако се проверава да су функције $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$ и $f(x) = x^2$ заиста решења.

6. Јасно је да је $\frac{2}{O_iO_j} = \sin \alpha_{ij} < \alpha_{ij}$, где је $2\alpha_{ij}$ угао између унутрашњих заједничких тангенти кругова k_i и k_j. Зато је довољно доказати да је $\sum_{i \neq j} \alpha_{ij} \leqslant (n-1)\pi$.

За произвољне $1 \leqslant i, j \leqslant n$ $(i \neq j)$ посматрајмо скуп k_{ij} свих тачака на кругу k_i у којима тангента на k_i сече или додирује круг k_j. Скуп k_{ij} се састоји од два лука са централним углом α_{ij}. По услову задатка, скупови k_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ су међусобно дисјунктни, па одмах имамо $2 \sum \alpha_{ij} \leqslant 2n\pi$.



Нека је $\mathcal{K}$ конвексни омотач кругова $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Његова граница се састоји од неколико дужи и од лукова кругова са укупним збиром дужина 2π. Ови лукови су дисјунктни са свим скуповима k_{ij}, тако да је у ствари $2 \sum \alpha_{ij} \leqslant 2(n-1)\pi$, што завршава наш доказ.