43. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Велика Британија – Глазгов, 19.–30. јул 2002.

Први дан
24. јул 2002.

1. Нека је n природан број и T скуп тачака (x, y) у равни таквих да су x и y ненегативни цели бројеви и $x + y < n$. Свака тачка скупа T обојена је црвено или плаво. Ако је тачка (x, y) обојена црвено, такве су и све тачке (x', y') скупа T за које је истовремено $x' \leqslant x$ и $y' \leqslant y$. Скуп од n плавих тачака назива се X-*скуп* ако имају различите x-координате, а скуп од n плавих тачака назива се Y-*скуп* ако имају различите y-координате. Доказати да је број X-скупова једнак броју Y-скупова. *(Колумбија)*

2. Нека је BC пречник кружнице k чији је центар O, A тачка на k таква да је $0^\circ < \sphericalangle AOB < 120^\circ$, а D средиште лука AB кружнице k који не садржи тачку C. Нека права која садржи тачку O и која је паралелна са DA сече праву AC у J. Нека симетрала дужи OA сече k у E и F. Доказати да је J центар кружнице уписане у троугао CEF. *(Јужна Кореја)*

3. Одредити све парове (m, n) природних бројева $(m, n \geqslant 3)$, тако да је

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

природан број за бесконачно много природних бројева a.
(Румунија)

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

43. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Велика Британија – Глазгов, 19.–30. јул 2002.

Други дан
25. јул 2002.

4. Нека је $n > 1$ природан број и нека су $d_1, d_2, \ldots, d_k$ сви позитивни делиоци броја n, при чему је

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$

Нека је $D = \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{i+1}$.

а) Доказати да је $D < n^2$.

б) Одредити све n за које је D делитељ од n^2. *(Румунија)*

5. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи

$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(z)) = f(xy - zt) + f(xt + yz),$$

за све реалне x, y, z, t. *(Индија)*

6. Нека су $k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(n \geqslant 3)$ кружнице полупречника 1 у равни. Нека су центри тих кружница $O_1, O_2, \ldots, O_n$, редом. Ако ниједна права нема заједничких тачака са више од две уочене кружнице, доказати да је

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{O_i O_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}\,.$$

(Украјина)

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена