МАЛА ОЛИМПИЈАДА

Бечићи, 21.04.2002.

1. Човек се налази у тачки $(1,1)$ у координатној равни и жели да нађе предмет који се налази у некој од тачака (a,b), при чему је $a \in \{1,2,\ldots,m\}$, $b \in \{1,2,\ldots,n\}$ и након тога се врати у тачку из које је кренуо. Колико му је потребно времена да уради тражени посао, ако не зна у којој од датих тачака се налази предмет и може да се креће у произвољном правцу брзином не већом од 1.

2. Нека је s полуобим троугла ABC. Нека су E и F тачке на правој AB, такве да је $CE = CF = s$. Доказати да се описана кружница троугла EFC и кружница која додирује страницу AB и продужетке страница AC и BC троугла ABC додирују.

3. Нека је низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ и

$$(n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2-n-1)x_n - (n-1)^3 x_{n-1} \text{ за } n \geqslant 3.$$

Доказати да је x_n цео број ако и само ако је n прост број.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

ДОДАТНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ
ЗА МЕЂУНАРОДНУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ

Београд, 08.06.2002.

4. Наћи највећу вредност израза $a+b+c+abc$, где су a, b и c ненегативни бројеви за које важи $a^2+b^2+c^2+abc \leqslant 4$.

5. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао у коме је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$. Нека су O и H редом центар описане кружнице и ортоцентар троугла ABC. Доказати да су тачке O, H и D колинеарне.

6. За сваки природан број n, нека је $f(n)$ број различитих могућих избора знака $+$ и $-$ за које важи $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n = 0$. Доказати да је:

(а) $f(n) = 0$ за $n \equiv 1, 2 \pmod 4$;

(б) $f(n) \geqslant 2^{\frac{n}{2}-1}$ за $n \equiv 0, 3 \pmod 4$.

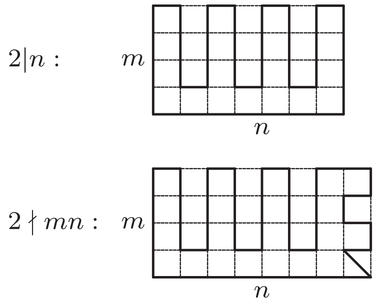
Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

РЕШЕЊА

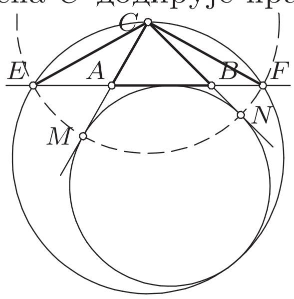
1. Човек треба да посети сваку од тачака (a, b) $(1 \leqslant a \leqslant m,\ 1 \leqslant b \leqslant n)$, па бар mn пута мора да пређе пут ("корак") дужине бар 1.

Ако је нпр. n паран број, човек може да то обави идући путањом дужине тачно mn (на слици).

С друге стране, ако су m и n непарни, он са сваким преласком у суседну тачку мења парност збира координата своје позиције. Како треба после непарног броја корака да се врати у полазну тачку, он бар у једном кораку мора да пређе у несуседну тачку и тиме направи корак дужине бар $\sqrt{2}$, па укупна путања није краћа од $mn+\sqrt{2}-1$. На слици је показано да се и ова дужина може остварити.



2. Приписани круг γ троугла ABC наспрам темена C додирује праве CA и CB у тачкама M и N таквим да је $CM = CN = s$. То значи да се у инверзији са центром C и полупречником s тачке E и F и круг γ сликају у себе, а описани круг троугла CEF се слика у праву AB која додирује круг γ. Пошто инверзија чува тангентност, тврђење задатка следи.



3. Заменом $nx_n = y_n$ рекурентна веза постаје $(n-2)y_{n+1} = (n^2-n-1)y_n - (n-1)^2 y_{n-1}$, што је еквивалентно са

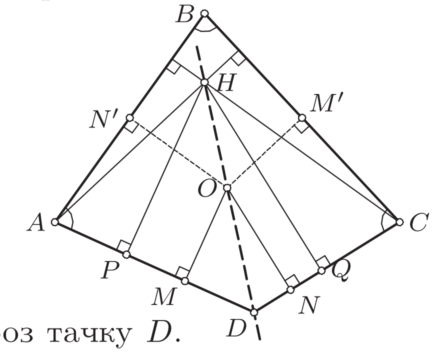
$$y_{n+1} - y_n = \frac{(n-1)^2}{n-2}(y_n - y_{n-1}).$$

Одавде једноставном индукцијом добијамо $y_{n+1} - y_n = (n-1)(n-1)! = n! - (n-1)!$ и $y_n = (n-1)! + 1$. Најзад, x_n је цео број ако и само ако $n \mid (n-1)! + 1$, што није тачно за сложено n (јер тада нзд$(n, (n-1)!) \neq 1$), а по Вилсоновој теореми је тачно за просто n.

4. Услов задатка не може да важи ако је $a^2+b^2+c^2 < 3$: заиста, тада је по А-Г неједнакости $3(abc)^{2/3} \leqslant a^2+b^2+c^2 < 3$, тј. $abc < 1$, па је $a^2+b^2+c^2+abc < 4$. Према томе, $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3$, али тада је $a+b+c \leqslant \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \leqslant a^2+b^2+c^2$, па је $a+b+c+abc \leqslant 4$. Последња неједнакост је једнакост за $a = b = c = 1$, те је највећа могућа вредност 4.

Напомена. При услову $a^2+b^2+c^2+abc=4$, најмања могућа вредност израза $a+b+c+abc$ је 2.

5. Нека су M, N, M', N' редом подножја нормала из тачке O на праве AD, CD, BC и AB, а P и Q редом подножја нормала из H на AD и CD. Из услова задатка следи да су праве OM' и ON' редом симетрале дужи BC и AB, па је $AH=2OM'=2OM$ и $CH=2ON'=2ON$. Осим тога, пошто је $\sphericalangle HAB=\sphericalangle HCB$, важи и $\sphericalangle HAD=\sphericalangle HCD$, па су троуглови AHP и CHQ слични. Према томе, $\frac{HP}{HQ}=\frac{AH}{CH}=\frac{OM}{ON}$, па како су O и H унутар угла ADC, права OH пролази кроз тачку D.



Друго решење. Углове троугла ABC означавамо уобичајено са α,β,γ. Тачке O и D су унутар угла AHC. По синусној Чевиној теореми је $\frac{\sin\sphericalangle AHO}{\sin\sphericalangle CHO}=\frac{\sin\sphericalangle HAO}{\sin\sphericalangle OAC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle ACO}{\sin\sphericalangle OCH}=\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\alpha-\gamma)}$ и $\frac{\sin\sphericalangle AHD}{\sin\sphericalangle DHO}=\frac{\sin\sphericalangle HAD}{\sin\sphericalangle DAC}\cdot\frac{\sin\sphericalangle ACD}{\sin\sphericalangle DCH}=\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\alpha-\gamma)}$, дакле $\frac{\sin\sphericalangle AHO}{\sin\sphericalangle CHO}=\frac{\sin\sphericalangle AHD}{\sin\sphericalangle CHD}$, одакле (опет по синусној Чевиној теореми) следи колинеарност тачака H, O и D.

6. Нека је $n\geqslant 2$. Од сваког распореда знакова за n могу да се направе два за $n{+}4$ додавањем $\pm(n{+}1)\mp(n{+}2)\mp(n{+}3)\pm(n{+}4)$. Још један се добија заменом знака уз 1 и додавањем или одузимањем $(n{+}1)-(n{+}2)+(n{+}3)-(n{+}4)=-2$. Најзад, још један распоред се добија заменом знака уз 2 и додавањем или одузимањем $(n{+}1)+(n{+}2)-(n{+}3)-(n{+}4)=-4$. Следи да је $f(n{+}4)\geqslant 4f(n)$. Како је $f(3)=f(4)=2$, тврђење следи.