МАЛА ОЛИМПИЈАДА

Бечићи, 21.04.2002.

1. Човек се налази у тачки $(1,1)$ у координатној равни и жели да нађе предмет који се налази у некој од тачака (a,b), при чему је $a \in \{1,2,\ldots,m\}$, $b \in \{1,2,\ldots,n\}$ и након тога се врати у тачку из које је кренуо. Колико му је потребно времена да уради тражени посао, ако не зна у којој од датих тачака се налази предмет и може да се креће у произвољном правцу брзином не већом од 1.

2. Нека је s полуобим троугла ABC. Нека су E и F тачке на правој AB, такве да је $CE = CF = s$. Доказати да се описана кружница троугла EFC и кружница која додирује страницу AB и продужетке страница AC и BC троугла ABC додирују.

3. Нека је низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ и

$$(n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2-n-1)x_n - (n-1)^3 x_{n-1} \text{ за } n \geqslant 3.$$

Доказати да је x_n цео број ако и само ако је n прост број.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

ДОДАТНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ

ЗА МЕЂУНАРОДНУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ

Београд, 08.06.2002.

4. Наћи највећу вредност израза $a + b + c + abc$, где су a, b и c ненегативни бројеви за које важи $a^2 + b^2 + c^2 + abc \leqslant 4$.

5. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао у коме је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$. Нека су O и H редом центар описане кружнице и ортоцентар троугла ABC. Доказати да су тачке O, H и D колинеарне.

6. За сваки природан број n, нека је $f(n)$ број различитих могућих избора знака $+$ и $-$ за које важи $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n = 0$. Доказати да је:

(а) $f(n) = 0$ за $n \equiv 1, 2 \pmod 4$;

(б) $f(n) \geqslant 2^{\frac{n}{2}-1}$ за $n \equiv 0, 3 \pmod 4$.

Време за рад 270 минута.

Сваки задатак вреди 25 поена.