19. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Анталија, Турска – 27. април 2002.

1. Неки парови скупа од n тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 4)$ су међусобно повезани дужима, тако да је свака тачка повезана са бар још три уочене тачке.

Доказати да постоје различите тачке $X_1, X_2, \ldots, X_{2k} \in \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ за неко $k \geqslant 2$, тако да су тачке X_i и X_{i+1} повезане за свако i $(1 \leqslant i \leqslant 2k)$, где је $X_{2k+1} \equiv X_1$.

(Југославија)

2. Низ $(a_n)_{n \geqslant 1}$ је дефинисан са

$$a_1 = 20, \quad a_2 = 30, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad \text{за } n \geqslant 1.$$

Одредити све природне n за које је $1 + 5a_n a_{n+1}$ потпун квадрат. *(Бугарска)*

3. Кругови C_1 и C_2 различитих полупречника се секу у тачкама A и B. Нека су заједничке тангенте ових кругова MN и ST $(M, S \in C_1, N, T \in C_2)$. Доказати да ортоцентри троуглова AMN, AST, BMN и BST чине темена правоугаоника.

(Румунија)

4. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такве да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$2n + 2001 \leqslant f(f(n)) + f(n) \leqslant 2n + 2002.$$

(Румунија)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

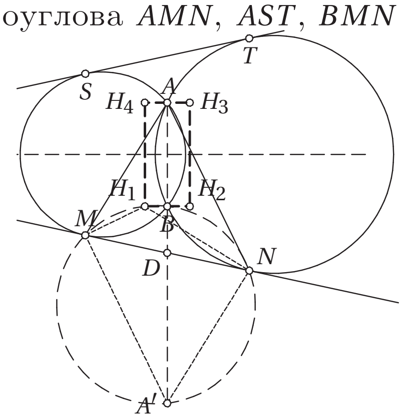
1. Посматрајмо најдужи пут $Y_1Y_2\dots Y_m$ са међусобно различитим тачкама $Y_i \in \{A_1,\dots,A_n\}$. Због максималности пута, тачка Y_1 је спојена само са Y_2 и неким Y_i, Y_j са $2 < i < j \leqslant n$. Међу индексима $2, i, j$, два су исте парности: означимо их са k, ℓ $(k < \ell)$. Тада је $Y_1Y_kY_{k+1}\dots Y_\ell Y_1$ кружни пут са парним бројем тачака.

2. Из рекурентне везе добијамо $5x_nx_{n+1} - 5x_{n-1}x_n = 5x_n(3x_n - 2x_{n-1}) = (4x_n - x_{n-1})^2 - (x_{n-1} + x_n)^2 = (x_n + x_{n+1})^2 - (x_{n-1} + x_n)^2$. Одавде следи да је

$$5x_nx_{n+1} - (x_n + x_{n+1})^2 = 5x_{n-1}x_n - (x_{n-1} + x_n)^2 = \cdots = 5x_1x_2 - (x_1 + x_2)^2 = 500.$$

Према томе, $1 + 5x_nx_{n+1} = (x_n + x_{n+1})^2 + 501$ је између $(x_n + x_{n+1})^2$ и $(x_n + x_{n+1} + 1)^2$ ако је $x_n + x_{n+1} > 250$, тј. за $n \geqslant 4$ јер је $x_3 = 70$, $x_4 = 180$, $x_5 = 470$, па тада није потпун квадрат. Провером за $n = 1,2,3$ добијамо да је $1 + 5x_nx_{n+1}$ потпун квадрат само за $n = 3$: $1 + 5 \cdot 70 \cdot 180 = 250^2 + 501 = 251^2$.

3. Означимо са H_1, H_2, H_3, H_4 редом ортоцентре троуглова AMN, AST, BMN и BST. Тачке H_3 и H_4 су редом симетричне тачкама H_2 и H_1 у односу на праву ℓ кроз центре кругова C_1 и C_2. Зато је довољно доказати да је $H_1H_2 \perp AB$.



Тачка $D = AB \cap MN$ је средиште дужи MN јер је $DM^2 = DA \cdot DB = DN^2$ (потенција у односу на дате кругове). Ако је A' тачка таква да је $AMA'N$ паралелограм, онда је $\sphericalangle H_1MA' = \sphericalangle H_1NA' = 90^\circ$, тј. тачке M и N леже на кругу γ над пречником H_1A'. И тачка B лежи на γ јер је $DB \cdot DA' = DM^2 = DM \cdot DN$. Одавде је $\sphericalangle H_1BA' = 90^\circ$. Аналогно је $\sphericalangle H_2BA' = 90^\circ$, па је заиста $B \in H_1H_2 \perp AB$.

4. Функција $f(n) = n + 667$ задовољава услове задатка.

За дато $n \in \mathbb{N}$, дефинишимо низ (a_k) са $a_0 = n$ и $a_{k+1} = f(a_k)$ за $k \geqslant 0$. Ако означимо $b_k = a_{k+1} - a_k - 667 - \frac{1}{6}$, по услову задатка важи $-\frac{1}{2} \leqslant c_k = b_{k+1} + 2b_k \leqslant \frac{1}{2}$. Како је

$$\begin{aligned}
b_m &= (-2)^m b_0 + \sum_{k=0}^{m-1} (-2)^{m-1-k} c_k \qquad \text{и} \\
a_n &= a_0 + 667n + \sum_{m=0}^{n-1} b_m = a_0 + 667n + \sum_{m=0}^{n-1} (-2)^m b_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-2)^{m-1-k} c_k \\
&= a_0 + 667n + \frac{1 - (-2)^n}{3} b_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1 - (-2)^{n-k-1}}{3} c_k \\
&\leqslant a_0 + 667n + \frac{1 - (-2)^n}{3} \left(b_0 + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \right),
\end{aligned}$$

мора да важи $a_n < 0$ за неко n ако је $|b_0| > \frac{1}{2}$. Пошто је по услову задатка $a_n > 0$ за све n, следи да је $-\frac{1}{2} \leqslant b_0 = f(n) - n - 667 - \frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{2}$, одакле је $f(n) = n + 667$.