ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Припремна варијанта, 22. октобар 2000.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 — **1.** У поља таблице 4×4 уписани су бројеви, тако да је сума суседа сваког броја једнака 1 (суседним се сматрају поља која имају заједничку страницу). Наћи суму свих бројева у таблици.

3 — **2.** Дати су: $ABCD$ - паралелограм, M - средиште странице CD, H - подножје нормале спуштене из темена B на праву AM. Доказати да је троугао BCH једнакокрак.

2 — **3.** а) На табли је написано 100 различитих бројева. Доказати да се међу њима може одабрати 8 бројева, тако да њихова аритметичка средина не може да се представи у облику аритметичке средине никојих 9 од бројева написаних на табли.

2 — б) На табли је написано 100 бројева. Познато је да се за сваких осам од тих бројева могу наћи таквих девет од тих бројева, да аритметичка средина тих осам бројева буде једнака аритметичкој средини тих девет бројева. Доказати да су сви бројеви једнаки.

5 — **4.** Зна се да се у скупу од 32 новчића који су једнаког облика налазе два неисправна новчића, који се од осталих разликују по тежини (исправни новчићи су једнаки по тежини међу собом, а неисправни новчићи су такође једнаки по тежини међу собом). Како поделити све новчиће на две гомиле једнаких тежина, а да се обави не више од 4 мерења на теразијама без тегова?

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. **Припремна варијанта**, 24. октобар 2000.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 **1.** Троугао ABC је уписан у кружницу. Кроз тачку A су конструисане тетиве које секу страницу BC у тачкама K и L и лук BC у тачкама M и N. Ако око четвороугла $KLNM$ може да се опише кружница, доказати да је троугао ABC једнакокрак.

3 **2.** Природни бројеви a, b, c, d су такви да је $ad-bc>1$. Доказати да бар један од бројева a, b, c, d није дељив са $ad-bc$.

4 **3.** Свака бочна страна петоугаоне призме има угао једнак φ (међу својим угловима). Наћи све могуће вредности φ.

4. Зна се да се у скупу од
3 а) 32
2 б) 22 новчића који су једнаког облика налазе два неисправна новчића, који се од осталих разликују по тежини (исправни новчићи су једнаки по тежини међу собом, а неисправни новчићи су такође једнаки по тежини међу собом). Како поделити све новчиће на две гомиле једнаких тежина, а да се обави не више од 4 мерења на теразијама без тегова?

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијанта, 29. октобар 2000.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени задаци

3 1. Дата је таблица $n \times n$ у чије је свако поље уписан број, при чему су сви бројеви у таблици различити. У свакој врсти је обележен најмањи број и испоставило се да се сви обележени бројеви налазе у различитим колонама. Затим је у свакој колони обележен најмањи број и испоставило се да се сви обележени бројеви налазе у различитим врстама. Доказати да су оба пута обележени исти бројеви.

3 2. Међу двема паралелним правама постављени су кружница полупречника 1, која додирује обе праве, и једнакокраки троугао, чија основица лежи на једној од правих а врх на другој. Познато је да троугао и кружница имају тачно једну заједничку тачку и да та тачка лежи на уписаној кружници троугла. Наћи полупречник уписане кружнице троугла.

4 3. Природни бројеви a, b, c, d су такви да је најмањи заједнички садржалац тих бројева једнак $a+b+c+d$. Доказати да је $abcd$ дељиво са 3 или са 5 (или и са једним и са другим).

4 4. Разматра се шаховска табла 8×8 чија поља нису обојена. На колико се начина може обојити табла црном и белом бојом, тако да буде 31 црно поље и да никоја два црна поља немају заједничку страницу? (Навести број начина и доказати да су урачунати сви начини; два начина бојења се сматрају различитим ако се може наћи поље које је при једном од тих начина бојења бело, а при другом - црно).

6 5. На десном тасу теразија лежи терет од 11111 г. Лице које мери редом ставља на тасове тегове, од којих први има масу 1 г., а сваки следећи је дупло тежи од претходног. У неком моменту теразије су дошле у равнотежу. На који тас је стављен тег од 16 г?

7 6. У пролећном колу турнира градова 2000. године ученицима старијих разреда земље N било је постављено 6 задатака. Сваки задатак је решило тачно 1000 ученика, али никоја два ученика нису решили заједно свих шест задатака. Који је најмањи могући број ученика земље N који су учествовали у пролећном колу? (Навести тај број, показати да за наведени број учесника услов задатка може бити испуњен и да за мањи број учесника он не може бити испуњен.)

8 7. Ђак првак има сто карата на којима су написани природни бројеви од 1 до 100, а такође и већу залиху знакова "+" и "=". Колики је највећи број тачних једнакости које он може да састави? (Свака карта може да се искористи највише један пут, у свакој једнакости може бити само један знак "=", карте се не могу превртати и слепљивати ради добијања нових бројева.)

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијанта, 29. октобар 2000.
10-11 разред (старији узраст)
(Поени за сваку тачку су дати у угластим заградама; резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају.)

---

1. [3] Природни бројеви a, b, c, d су такви да је најмањи заједнички садржалац тих бројева једнак $a+b+c+d$. Доказати да је $abcd$ дељиво са 3 или са 5 (или и са једним и са другим).

2. [4] За које највеће n је могуће изабрати на површи коцке n тачака, тако да не леже све на једној страни коцке и да при том буду темена правилног (равног) n-тоугла.

3. [4] Дужине страница троугла ABC једнаке су a, b и c ($AB=c$, $BC=a$, $CA=b$ и $a<b<c$). На полуправама BC и AC означене су редом тачке B_1 и A_1, такве да је $BB_1=AA_1=c$. На полуправама CA и BA означене су редом тачке C_2 и B_2, такве да је $CC_2=BB_2=a$. Наћи однос дужи A_1B_1 према дужи C_2B_2.

4. Нека су a_1, a_2, ... , a_n цели бројеви различити од нуле, такви да једнакост

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}} = x$$

важи за све вредности x које улазе у област дефинисаности разломка који се налази на левој страни једнакости.

а) [3] Доказати да је број n паран.

б) [4] За које најмање n такви бројеви постоје?

5. [6] Поља табле $m\times n$ су обојена са две боје. Познато је да ће топ постављен на било које поље тући више поља не оне боје на којој стоји (сматра се да топ туче поље на коме стоји). Доказати да се на свакој вертикали и свакој хоризонтали налази једнако много поља обе боје.

6. а) [5] Неколико црних квадрата странице 1 cm приковани су на белу раван ексером дебљине 0,1 cm. Формирана је многоугаона црна фигура. Може ли обим те фигуре бити већи од 1 km? (Ексер не додирује руб квадрата.)

б) [5] Решити исти задатак, под претпоставком да је дебљина ексера једнака 0 (т. ј. да је попречни пресек ексера тачка).

в) [5] Неколико црних квадрата странице 1 cm који леже на белој равни формирају многоугаону црну фигуру (могуће је да се она састоји од неколико делова и да има рупе). Може ли однос обима те фигуре према њеној површини бити већи од 100000?