41. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 21.04.2001.

Први разред

1. Нека су $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ конвексни четвороуглови у равни такви да је $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$ и $DA = D_1A_1$. Ако су дијагонале AC и BD међусобно нормалне, доказати да су то и дијагонале A_1C_1 и B_1D_1.

2. Дато је 5 дужи, тако да од сваке три може да се састави троугао. Доказати да су неке три од њих странице оштроуглог троугла.

3. Нека су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \geqslant 3)$ првих n простих бројева. Доказати да је

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n} < \frac{1}{2}\,.$$

4. На гомили се налази n новчића. Два играча играју игру у којој наизменично повлаче потезе. Потез се састоји од узимања 5, 7 или 11 новчића са гомиле. Губи играч који не може да одигра потез. Који играч, први или други, има победничку стратегију ако је:

(а) $n = 2001$;

(б) $n = 5000$?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

41. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 21.04.2001.

Други разред

1. Нека је $S = \{x^2 + 2y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Ако је a цео број са својством да $3a$ лежи у S, доказати да и a лежи у S.

2. Темена квадрата $ABCD$ странице $25/4$ леже на сфери. Паралелне праве кроз тачке A, B, C и D поново секу сферу у тачкама A_1, B_1, C_1 и D_1, редом. Ако је $AA_1 = 2$, $BB_1 = 10$, $CC_1 = 6$, одредити дужину дужи DD_1.

3. Наћи све природне бројеве n за које постоји бојење свих тачака у простору тако да је сваки од следећих услова задовољен:

(i) свака тачка је обојена тачно једном бојом;

(ii) коришћено је тачно n боја;

(iii) свака права је обојена у највише две боје.

4. Нека је S скуп свих n-торки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реалних бројева са својством да је најмањи од бројева $x_1, \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ једнак 0, а највећи једнак 1. Одредити

$$\max_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i - x_j) \quad \text{и} \quad \min_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i - x_j).$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

41. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 21.04.2001.

Трећи и четврти разред

1. Решити једначину $x^y + y = y^x + x$ у скупу природних бројева.

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{2001}$ позитивни бројеви такви да је

$$x_i^2 \geqslant x_1^2 + \frac{x_2^2}{2^3} + \frac{x_3^2}{3^3} + \cdots + \frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3} \quad \text{за } 2 \leqslant i \leqslant 2001.$$

Доказати да је

$$\sum_{i=2}^{2001} \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1}} > 1.999\,.$$

3. Нека је k природан број и нека је N_k број низова дужине 2001 чији су сви чланови у скупу $\{0, 1, 2, \ldots, 2k+1\}$ и међу којима има непаран број нула. Одредити највећи степен двојке који дели N_k.

4. Основа пирамиде $SABCD$ је паралелограм $ABCD$. Равни одређене троугловима ASC и BSD су међусобно нормалне. Наћи површину стране ASD, ако су површине страна ASB, BSC и CSD једнаке x, y и z, редом.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

РЕШЕЊА

1.1. Тврђење задатка је директна последица познатог тврђења:

Лема. За четири тачке A, B, C, D у равни важи $AC \perp BD$ ако и само ако је $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

Доказ. Нека су у координатном систему $A(x_a, y_a)$, $B(0,0)$, $C(x_c, y_c)$ и $D(d, 0)$. Тада је $AB^2 - DA^2 = x_a^2 - (d - x_a)^2 = d(2x_a - d)$ и слично $BC^2 - CD^2 = d(2x_c - d)$, дакле $AB^2 - DA^2 = BC^2 - CD^2$ ако и само ако је $x_a = x_c$, тј. $AC \perp BD$. □

1.2. Нека су $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$ дужине дужи. Претпоставимо да никоје три не чине оштроугли троугао. Тада је $e^2 \geqslant c^2 + d^2 \geqslant b^2 + 2c^2 \geqslant 2a^2 + 3b^2 > 2(a^2 + b^2) \geqslant (a+b)^2$, тј. $e > a + b$, па a, b и e нису странице троугла, контрадикција.

1.3. Означимо са S суму из задатка. Свакако је $p_1 \geqslant 2$. За $k \geqslant 2$ је $p_k \geqslant 2k - 1$, па је $\frac{1}{p_k^2} \leqslant \frac{1}{(2k-1)^2} < \frac{1}{4k(k-1)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k})$. Такође имамо $\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n} < \frac{1}{6p_n} < \frac{1}{6(2n-1)}$. Сада је

$$S < \frac{1}{2^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{6(2n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{6(2n-1)} < \frac{1}{2}\,.$$

1.4. Играч који је на потезу губи ако на гомили има $0, 1, 2, 3$ или 4 новчића. С друге стране, ако је на гомили између 5 и 15 новчића, играч који је на потезу може да одигра потез тако да остави $0, 1, 2, 3$ или 4 новчића. Нека је $n \geqslant 16$. Зваћемо број n *лепим* ако даје један од остатака $5, 6, \ldots, 15$ при дељењу са 16, а у супротном *ружним.* Примћујемо да:

(1) Ако је n леп, играч који је на потезу може да одигра потез тако да остане ружан број жетона.

(2) Ако је n ружан, ма како играч на реду одиграо потез, остаје леп број жетона.

Тако побеђује играч који после сваког потеза може да остави противнику ружан број жетона. Ако је n леп (нпр. $n = 2001$) то је први играч, а у супротном (нпр. за $n = 5000$) је то други играч.

2.1. Ако је $3a = x^2 + 2y^2$, онда је

$$a = \left(\frac{x+2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x-y}{3}\right)^2 = \left(\frac{x-2y}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{x+y}{3}\right)^2. \qquad (*)$$

Из $x^2 - y^2 = 3(a - y^2)$ следи да $3 \mid x - y$ (и такође $3 \mid x + 2y$) или $3 \mid x+y$ (и такође $3 \mid x-2y$). У оба случаја бар једно представљање у $(*)$ има целобројне сабирке.

2.2. Средишта A_2, B_2, C_2, D_2 дужи AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 редом и центар сфере O леже на некој равни π. Означимо са a, b, c, d редом усмерена растојања AA_2, BB_2, CC_2, DD_2, при чему је $b = 5$. Имамо $a = \pm 1$, $c = \pm 3$ и $a + c = b + d$.

Због $|b - c| < BC = \frac{25}{4}$ мора бити $c = 3$. Претпоставимо да је $a = -1$. Тада је $A_2B_2 = \sqrt{(\frac{25}{4})^2 - (a-b)^2} = \frac{7}{4}$, $B_2C_2 = \sqrt{(\frac{25}{4})^2 - (b-c)^2} = \frac{\sqrt{561}}{4}$ и $A_2C_2 = \sqrt{(\frac{25}{2\sqrt{2}})^2 - (a-c)^2} = \frac{\sqrt{994}}{4}$, али то је немогуће јер је тада $A_2C_2 > A_2B_2 + B_2C_2$. Остаје само случај $a = 1$ и $d = -1$, па је $DD_1 = 2|d| = 2$.

2.3. Тражено бојење постоји за $n = 4$ (и самим тим за све $n \leqslant 4$): довољно је обојити бојом 1 координатни почетак O, бојом 2 све тачке x-осе осим тачке O, бојом 3 све тачке xy-равни ван x-осе, и бојом 4 све тачке простора ван xy-равни.

Претпоставимо да тражено бојење постоји за неко $n \geqslant 5$. Посматрајмо тачке A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 у бојама $1, 2, 3, 4, 5$, редом, и раван α која није паралелна ниједној од правих A_iA_j. Ако α не садржи две боје, рецимо 4 и 5, онда је пресечну тачку α са правом A_4A_5 немогуће обојити. Дакле, α садржи бар 4 разнобојне тачке, рецимо B_1, B_2, B_3, B_4. Бар две праве одређене паровима ових тачака се секу, рецимо $O = B_1B_2 \cap B_3B_4$, а тачку O је немогуће обојити, што је контрадикција.

2.4. По услову задатка је $0 \leqslant s_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leqslant k$ за све k (и $s_0 = 0$). Одавде следи $1 - k \leqslant x_k = s_k - s_{k-1} \leqslant k$, па је $x_i - x_j \leqslant i - (1 - j) = i + j - 1 \leqslant 2n - 2$. Тражени максимум је заиста $2n - 2$, јер се достиже за низ $(0, 0, \ldots, 0, n-1, 1-n)$.

Услов задатка гарантује постојање индекса k, ℓ таквих да је $s_k = 0$ и $s_\ell = \ell$. Заменом низа (x_i) низом $(1 - x_i)$ по потреби можемо да сматрамо да је $k < \ell$. Постоји $j \leqslant k$ такво да је $x_j \leqslant 0$. С друге стране, како је $x_{k+1} + \cdots + x_\ell = \ell$, за неко i са $k < i \leqslant \ell$ важи $x_i \geqslant \frac{\ell}{\ell-k} \geqslant \frac{n}{n-1}$, и тада је $x_i - x_j \geqslant \frac{n}{n-1}$. Тражени минимум је заиста $\frac{n}{n-1}$, јер се достиже за низ $(0, \frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-1}, \ldots, \frac{n}{n-1})$.

3.1. За $x = 1$ или $x = y$ добијамо тривијална решења. Нека је $1 < x < y$. Једно решење је $(x, y) = (2, 3)$; с друге стране, ако је $x = 2$ и $y \geqslant 4$, онда је $2^y + y > y^2 + 2$, па тада нема решења.

Остаје случај $3 \leqslant x < y$. Тада важи $x^y > y^x$, или еквивалентно, $f(x) > f(y)$, где је $f(x) = \frac{\ln x}{x}$: заиста, функција $f(x)$ је опадајућа за $x > e$ јер је $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$. Према томе, у овом случају је $x^y + y > y^x + x$, па ни тада нема решења.

3.2. По Коши-Шварцовој неједнакости имамо

$$(1^3+2^3+\cdots+(i-1)^3)\left(x_1^2+\frac{x_2^2}{2^3}+\cdots+\frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3}\right) \geqslant (x_1+x_2+\cdots+x_{i-1})^2.$$

Како је $1^3 + 2^3 + \cdots + (i-1)^3 = (\frac{i(i-1)}{2})^2$, одавде следи $\frac{i(i-1)}{2}x_i \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1}$, тј.

$$\frac{x_i}{x_1+\cdots+x_{i-1}} \geqslant \frac{2}{i(i-1)} = 2\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right).$$

Сабирањем ових неједнакости за $i = 2, 3, \ldots, 2001$ следи тврђење задатка.

3.3. Број посматраних низова дужине 2001 са $2001 - 2n$ нула једнак је $\binom{2001}{2n}(2k+1)^{2n}$. Зато је

$$N_k = \sum_{n=0}^{1000} \binom{2001}{2n}(2k+1)^{2n}.$$

Ако означимо $M_k = \sum_{n=0}^{1000}\binom{2001}{2n+1}(2k+1)^{2n+1}$, биномна формула даје $M_k + N_k = (2k+2)^{2001}$ и $M_k - N_k = (2k)^{2001}$, одакле налазимо $N_k = \frac{(2k+2)^{2001}-(2k)^{2001}}{2} = 2^{2000}((k+1)^{2001} - k^{2001})$. Како је $(k+1)^{2001} - k^{2001}$ непаран број, одговор је 2^{2000}.

3.4. Поставимо координатни систем тако да су равни xz и yz редом равни SAC и SBD, а координатни почетак $O = AC \cap BD$. Тада имамо $S(0,0,s)$, $A(a,0,c)$, $B(0,b,d)$, $C(-a,0,-c)$, $D(0,-b,-d)$, па лако налазимо $SA^2 = a^2 + (s-c)^2$, $SB^2 = b^2 + (s-d)^2$, $SC^2 = a^2 + (s+c)^2$, $SD^2 = b^2 + (s+d)^2$. Применом Хероновог обрасца добијамо

$$\begin{array}{ll} P_{SAB}^2 = \frac{a^2b^2+a^2(s-d)^2+b^2(s-c)^2}{4}, & P_{SBC}^2 = \frac{a^2b^2+a^2(s-d)^2+b^2(s+c)^2}{4}, \\ P_{SCD}^2 = \frac{a^2b^2+a^2(s+d)^2+b^2(s+c)^2}{4}, & P_{SDA}^2 = \frac{a^2b^2+a^2(s+d)^2+b^2(s-c)^2}{4}. \end{array}$$

Одавде је $P_{SAB}^2 + P_{SCD}^2 = P_{SBC}^2 + P_{SDA}^2$, тј. $P_{SDA} = \sqrt{x^2 - y^2 + z^2}$.