**Друштво математичара Србије**

# РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**24.03.2001.**

## Први разред – А категорија

**1.** Да ли се првих сто природних бројева могу поделити у три групе, тако да је збир бројева прве дељив са 102, збир бројева друге дељив са 203, и збир бројева треће дељив са 304?

**2.** Дат је оштроугли троугао $ABC$. Нека је $BK$ ($K \in AC$) симетрала његовог унутрашњег угла у темену $B$, $CD$ висина, $N \in CD$ тачка таква да је $KN \perp BC$, и $M = BK \cap CD$. Ако је $P$ пресечна тачка круга описаног око троугла $BKN$ и праве $AB$, $P \neq B$, доказати да је $PK = PM$.

**3.** Нека су $a$, $b$, $c$ позитивни бројеви такви да је $a > c$ и $b > c$. Доказати:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}\,.$$

**4.** Дат је круг $k$ полупречника $31mm$ и изломљена линија $\ell$ дужине $61mm$ којој се обе крајње тачке налазе на том кругу. Доказати да постоји права $p$ која садржи центар круга $k$ таква да се све тачке изломљене линије $\ell$ налазе са исте стране праве $p$.

**5.** Дат је скуп $\mathcal{A}$ од 2000 тачака у равни тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да се ове тачке могу спојити са 1000 плавих, 1000 црвених и 1000 жутих дужи тако да важи:

(1) свака тачка скупа $\mathcal{A}$ спојена је са тачно три друге тачке скупа $\mathcal{A}$;

(2) из сваке тачке скупа $\mathcal{A}$ полазе дужи три различите боје;

(3) дужи различитих боја немају заједничких унутрашњих тачака.

Време за рад 240 минута.

**Друштво математичара Србије**

**РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**24.03.2001.**

## Други разред – А категорија

**1.** Одредити скуп свих реалних вредности параметра $a$ за које неједначина

$$x^2 - a(a+1)x + a^3 \leqslant 0$$

има тачно пет целобројних решења.

**2.** Наћи два седмоцифрена броја таква да су њихов збир, њихова разлика и збир цифара једног од њих факторијели неких бројева.

**3.** Свака дијагонала конвексног петоугла одсеца троугао јединичне површине. Израчунати површину тог петоугла.

**4.** На полукругу полупречника 1 са пречником $AD$ дате су тачке $B$ и $C$. Доказати да важи $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AB \cdot BC \cdot CD = 4$.

**5.** Да ли се бројеви $1, 2, \ldots, 2001$ могу поређати по кругу тако да разлика свака два суседна броја припада интервалу $[500, 999]$?

Време за рад 240 минута.

**Друштво математичара Србије**

**РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**24.03.2001.**

**Трећи разред – А категорија**

**1.** У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 &= 0 \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 &= 0 \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 &= 0. \end{aligned}$$

**2.** Ако су $a$, $b$ и $c$ дужине страница, $P$ површина и $s$ полуобим неког троугла, доказати да важи неједнакост

$$3^{500} \cdot (a^{2001} + b^{2001} + c^{2001}) \geqslant 2^{2001} \cdot P^{1000} \cdot s.$$

**3.** Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван $\alpha$ једнак мерном броју дужине нормалне пројекције те коцке на праву $n$ нормалну на $\alpha$.

**4.** На табли је написан природан број $a$. Дозвољено је додати том броју неки његов делилац различит од тог броја и јединице. На добијени број дозвољено је применити исту процедуру, итд. Одредити све бројеве који се на тај начин могу добити полазећи од броја $a = 4$.

**5.** Наћи све функције $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ такве да је $2f(x) = f(x - y) + f(x + y)$ за све $x, y \in \mathbb{Q}$.

Време за рад 240 минута.

**Друштво математичара Србије**

**РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**24.03.2001.**

**Четврти разред – А категорија**

**1.** Колико има функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таквих да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n) > 1$ и $f(n+3)f(n+2) = f(n+1) + f(n) + 36$?

**2.** Ако су $a$, $b$ и $c$ дужине страница, $P$ површина и $s$ полуобим неког троугла, доказати да важи неједнакост

$$3^{500} \cdot (a^{2001} + b^{2001} + c^{2001}) \geqslant 2^{2001} \cdot P^{1000} \cdot s.$$

**3.** Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван $\alpha$ једнак мерном броју дужине нормалне пројекције те коцке на праву $n$ нормалну на $\alpha$.

**4.** У кутији се налазе 4 куглице нумерисане бројевима $1, 2, 3, 4$. Два играча играју игру у којој наизменично бирају са враћањем једну куглицу из кутије. Избори су међусобно независни, а свака куглица има вероватноћу $\frac{1}{4}$ да буде изабрана у сваком кораку. Игра се завршава у тренутку када је збир свих до тада изабраних бројева дељив са 3, победом играча који је последњи бирао куглицу. Одредити вероватноћу догађаја да се игра заврши победом играча који је први бирао куглицу.

**5.** Дати су реални бројеви $x$ и $r$, $|r| \leqslant \frac{1}{2}$. Низ $(s_n)$ задат је са

$$s_1 = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad s_n = s_{n-1} + r^{n-1}\cos(2^{n-2}x), \quad n \geqslant 2.$$

Доказати да су сви чланови тог низа ненегативни.

Време за рад 240 минута.

**Друштво математичара Србије**

**РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**24.03.2001.**

## Први разред – Б категорија

**1.** Ако је
$$x = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}, \quad y = \frac{a}{c} + \frac{c}{a}, \quad z = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \quad (abc \neq 0),$$
доказати да вредност израза $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ не зависи од $a, b, c$.

**2.** Круг уписан у троугао $ABC$ додирује странице $BC$ и $BA$ редом у тачкама $M$ и $N$. Ако је $K$ пресечна тачка симетрале угла $BAC$ са правом $MN$, израчунати угао $AKC$.

**3.** Домаћица је направила торту округлог облика, али не зна тачна колико ће имати гостију - троје или четворо. Који је најмањи број праволинијских резова торте које она треба да направипре него што дођу гости, тако да у сваком случају, без допунских резова, сваки гост може да добије једнаку количину торте?

**4.** Производ природних бројева $x$ и $y$ је троцифрен број са једнаким цифрама, а њихов збир је двоцифрен, такође са једнаким цифрама. Наћи све такве бројеве $x$ и $y$.

**5.** Дат је скуп $\mathcal{A}$ од 2000 тачака у равни тако да међу њима не постоје три колинеарне. Доказати да се ове тачке могу спојити са 1000 плавих, 1000 црвених и 1000 жутих дужи тако да важи:

(1) свака тачка скупа $\mathcal{A}$ спојена је са тачно три друге тачке скупа $\mathcal{A}$;

(2) из сваке тачке скупа $\mathcal{A}$ полазе дужи три различите боје;

(3) дужи различитих боја немају заједничких унутрашњих тачака.

Време за рад 240 минута.

**Друштво математичара Србије**

**РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**24.03.2001.**

## Други разред – Б категорија

**1.** Одредити скуп свих реалних вредности параметра $a$ за које неједначина

$$x^2 - a(a+1)x + a^3 \leqslant 0$$

има тачно пет целобројних решења.

**2.** У равни су дати кругови $k_1$ и $k_2$ са центрима $O_1$ и $O_2$. Полуправе $O_1a$ и $O_1b$ додирују круг $k_2$ и секу $k_1$ у тачкама $A$ и $B$, а полуправе $O_2c$ и $O_2d$ додирују $k_1$ и секу $k_2$ у тачкама $C$ и $D$. Доказати да је $AB = CD$.

**3.** Нека су $a$, $b$, $c$ позитивни бројеви такви да је $a > c$ и $b > c$. Доказати:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leqslant \sqrt{ab}\,.$$

**4.** Одредити све вредности реалног параметра $a$ тако да једначина

$$4^x - (a+3)2^x + 4a - 4 = 0$$

има тачно једно реално решење.

**5.** Да ли је број

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{9\sqrt{8}+8\sqrt{9}}$$

рационалан или ирационалан? Одговор образложити.

Време за рад 240 минута.

**Друштво математичара Србије**

**РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**24.03.2001.**

**Трећи разред – Б категорија**

**1.** Доказати да је
$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}$$
за све реалне бројеве $x$ и $y$.

**2.** Странице троугла су три узастопна природна броја, а један од углова троугла је два пута већи од једног од преостала два угла. Одредити дужине страница тог троугла.

**3.** Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван $\alpha$ једнак мерном броју дужине нормалне пројекције те коцке на праву $n$ нормалну на $\alpha$.

**4.** Ако су $a$, $b$, $c$ дужине страница троугла, доказати да је трином
$$ax^2 + (b-c-a)x + c$$
позитиван за све реалне бројеве $x$.

**5.** Нека су $a$, $b$, $c$ међу собом различити реални бројеви, различити од нуле. Доказати да је вредност детерминанте
$$\begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ a & b & c \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$$
различита од нуле.

Време за рад 240 минута.

**Друштво математичара Србије**

**РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**

**24.03.2001.**

## Четврти разред – Б категорија

**1.** У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned} x+y+z &= \tfrac{7}{2} \\ x^2+y^2+z^2 &= \tfrac{41}{4} \\ x^2y^2z+xy^2z^2+x^2yz^2 &= -\tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

**2.** Дат је природан број $a$ и аритметички низ $a, 3a, 5a, 7a, \dots$ Чланови тог низа груписани су на следеци начин: прву групу чине првих $a$ чланова, другу следећих $2a$ чланова, трећу следећих $3a$ чланова, итд. Доказати да је збир елемената у свакој групи једнак кубу броја елемената те групе.

**3.** Доказати да је мерни број површине нормалне пројекције јединичне коцке на произвољну раван $\alpha$ једнак мерном броју дужине нормалне пројекције те коцке на праву $n$ нормалну на $\alpha$.

**4.** Дата је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква да је $f(f(m)+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ за све природне бројеве $m$ и $n$. Ако је $f(1) = 29$ и $f(29) = 58$, израчунати $f(2001)$.

**5.** Дата је реална функција $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где су $a, b, c, d$ дати реални бројеви, $ad-bc \neq 0$. Доказати да је ова функција једнака својој инверзној функцији ако и само ако важи $a+d=0$.

Време за рад 240 минута.