Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Први разред – А категорија

1. Наћи све тројке (x, y, z) природних бројева за које важи

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 2000.$$

2. Одредити све природне бројеве n за које је $5^n + 7^n + 11^n = 6^n + 8^n + 9^n$.

3. У равни су дати једнакостранични троуглови ABC и PQR тако да се тачка R налази унутар дужи AB, а тачка C унутар дужи PQ, при чему се тачке A и P налазе са исте стране праве CR. Доказати да су праве AP и BQ паралелне.

4. Тачке A, B, C, D, E налазе се на истом кругу тако да су A и D са различитих страна праве BC, а B и E са различитих страна CD. Ако је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = 45^\circ$, доказати да је $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$.

5. Четири темена датог правилног осмоугла треба обојити плавом, а преостала четири црвеном бојом. Два бојења сматрамо еквивалентним ако постоји ротација равни тог осмоугла која свако његово теме преводи у теме обојено истом бојом. Колико има нееквивалентних бојења?

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Други разред – А категорија

1. Ако су x, y и z реални бројеви такви да је $\sin x + \sin y + \sin z \geqslant 2$, онда је $\cos x + \cos y + \cos z \leqslant \sqrt{5}$. Доказати.

2. Наћи све реалне бројеве a за које постоје реални бројеви x и y тако да важи

$$x^2 + 2xy - 7y^2 \geqslant \frac{1-a}{a+1} \quad \text{и} \quad 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leqslant -2.$$

3. Решити неједначину

$$(2001^x)^{1-2001^x} + (2001^{2x})^{1-2001^{2x}} + \cdots + (2001^{2001x})^{1-2001^{2001x}} \geqslant 2001$$

у скупу ненегативних реалних бројева.

4. У равни су дати једнако оријентисани квадрати $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Доказати да су средишта дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 темена квадрата.

5. Фигуру у равни коју чини низ од четири различита квадрата странице 1, тако да узастопни квадрати у низу имају заједничку страницу, а они који нису узастопни су дисјунктни или имају заједничко теме, зваћемо *змијица*. Квадратна табла 4×4 прекривена је са четири змијице: црвеном, жутом, плавом и зеленом, које се не преклапају. Доказати да постоји бар једна врста, колона или дијагонала квадратне табле чија су поља обојена са четири различите боје.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Трећи разред – А категорија

1. Ако је $1 < x < y < z$, доказати да је

$$\log_x(\log_x y) + \log_y(\log_y z) + \log_z(\log_z x) > 0.$$

2. Низ реалних бројева (x_n) задат је са

$$x_1 = a > 0, \quad x_2 = b > 0, \quad x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{x_{n-2}} \text{ за } n \geqslant 3.$$

Израчунати x_{2001} у функцији од a и b.

3. Дата је раван α, и тачке A и B ван ње које се налазе са исте стране те равни. Посматрајмо кружнице које садрже тачке A и B и додирују α. Одредити геометријско место додирних тачака свих таквих кружница са равни α.

4. У равни су дати правоугаоници $ABCD$ и $CEFG$ такви да је $AB = CE$, $BC = EF$, $D - C - E$ и $B - C - G$, са истакнутим дијагоналама AC и EG. Дозвољено је правоугаоник $ABCD$ пресликати симетрично у односу на неку од његових страница, на тако добијени правоугаоник применити исту операцију, итд. Да ли је могуће, применом неколико таквих пресликавања, тај правоугаоник довести до поклапања са $CEFG$, тако да им се и истакнуте дијагонале поклопе?

5. Нека је $S = \{r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_{15}^4 \mid r_1, r_2, \ldots, r_{15} \in \mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N} \setminus S$ бесконачан.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Четврти разред – А категорија

1. Ако је $1 < x < y < z$, доказати да је

$$\log_x(\log_x y) + \log_y(\log_y z) + \log_z(\log_z x) > 0.$$

2. Доказати да је могуће наћи 10000 десетоцифрених бројева дељивих са 7, тако да се сваки може добити од сваког другог заменом места цифара.

3. Дата је раван α, и тачке A и B ван ње које се налазе са исте стране те равни. Посматрајмо кружнице које садрже тачке A и B и додирују α. Одредити геометријско место додирних тачака свих таквих кружница са равни α.

4. Квадрат странице 1 изрезан је на k правоугаоника. Доказати да збир дужина краћих страница тих правоугаоника није мањи од 1.

5. Нека је $S = \{r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_{15}^4 \mid r_1, r_2, \ldots, r_{15} \in \mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N} \setminus S$ бесконачан.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Први разред – Б категорија

1. Наћи све парове (x, y) целих бројева за које важи $(x+y+2)^2 = 3(xy+1)$.

2. Дат је једнакокраки трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$. Ако је E пресек његових дијагонала, а O центар круга описаног око трапеза $ABCD$, доказати да тачка E припада кругу описаном око троугла AOD.

3. Ако су a, x, y реални бројеви такви да је $2ax + 3y \neq 0$ и $y > 1$, доказати да важи

$$\frac{2a^2x^2 + axy - 3y^2}{2ax + 3y} + \frac{3axy + 3y^2 - ax - y}{1 - 3y} + \frac{1 - 6y + 9y^2}{3y - 1} > 0.$$

4. Дат је једнакокраки троугао ABC коме је унутрашњи угао у темену A туп. Нека је D тачка на његовој основици таква да је $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ и E тачка на страници AC таква да важи $AE = AD$. Израчунати угао EDC.

5. Четири темена датог правилног осмоугла треба обојити плавом, а преостала четири црвеном бојом. Два бојења сматрамо еквивалентним ако постоји ротација равни тог осмоугла која свако његово теме преводи у теме обојено истом бојом (тј. слика једно бојење у друго). Колико има нееквивалентних бојења?

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Други разред – Б категорија

1. Наћи све парове (x, y) целих бројева за које важи $x^3 - 3y^2 = 2$.

2. Нека је D дискриминанта квадратног тринома $ax^2 + bx + c$ са целим коефицијентима a, b и c. Да ли D може да буде једнако:
а) 2001; б) 2002; в) 2003?

3. Дат је правоугаоник $ABCD$ код кога је $AB = 6\,\mathrm{cm}$ и $BC = 3\,\mathrm{cm}$. Тачка E налази се на страници AB, $BE = 2\,\mathrm{cm}$, а тачка F на страници BC, $BF = 1\,\mathrm{cm}$. У петоугао $AEFCD$ треба уписати правоугаоник највеће могуће површине. Колика је та површина?

4. У равни су дати једнако оријентисани квадрати $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Доказати да су средишта дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 темена квадрата.

5. Дати су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ такви да је $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1A_1B_1$ и $\sphericalangle ABC + \sphericalangle A_1B_1C_1 = 180^\circ$. Доказати да је $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Трећи разред – Б категорија

1. Ако су x, y и z реални бројеви такви да је $\sin x + \sin y + \sin z \geqslant 2$, онда је $\cos x + \cos y + \cos z \leqslant \sqrt{5}$. Доказати.

2. Нека су $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ четири јединична вектора за које важи $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 0$. Израчунати вредност израза $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}$.

3. На страницама AB, AC, BC једнакостраничног троугла ABC дате су редом тачке C_1, B_1, A_1 такве да је $AC_1 = BA_1 = CB_1 = AB/3$. У ком односу стоје површине троугла ABC и троугла који граде праве AA_1, BB_1, CC_1?

4. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)(x-1)^{\frac{1}{2}(\log_2 (x-1)^2)^2 - 7} = \left(\frac{x-1}{4}\right)^6.$$

5. Нека је $S = \{r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_{15}^4 \mid r_1, r_2, \ldots, r_{15} \in \mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N} \setminus S$ бесконачан.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2001.

Четврти разред – Б категорија

1. Ако су a, b, c решења једначине $x^3 - x + 1 = 0$, израчунати вредност израза $a^8 + b^8 + c^8$.

2. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x^2y + y + xy^2 + x &= 18xy \\ x^4y^2 + y^2 + x^2y^4 + x^2 &= 208x^2y^2. \end{aligned}$$

3. Око купе висине h и полупречника основе r описују се купе са центрима основе у врху дате купе. Одредити висину оне од тих описаних купа која има најмању запремину.

4. Дати су скупови $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+1| = |z-i|\}$ и $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-5| = 2\}$. Одредити минимум израза $|z_1 - z_2|$ када је $z_1 \in A$ и $z_2 \in B$.

5. Нека је $S = \{r_1^4 + r_2^4 + \cdots + r_{15}^4 \mid r_1, r_2, \ldots, r_{15} \in \mathbb{Z}\}$. Доказати да је скуп $\mathbb{N} \setminus S$ бесконачан.

Време за рад 180 минута.