42. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Вашингтон, Сједињене Америчке Државе – недеља, 8. јул 2001.

1. Нека је ABC оштроугли троугао и O центар његове описане кружнице. Нека је P подножје висине из A на страницу BC. Ако је $\sphericalangle BCA \geqslant \sphericalangle ABC + 30^\circ$, доказати да је $\sphericalangle CAB + \sphericalangle COP < 90^\circ$. *(Јужна Кореја)*

2. Доказати да је

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$$

за све позитивне бројеве a, b, c. *(Јужна Кореја)*

3. На математичком такмичењу учествовали су 21 дечак и 21 девојчица. Свако од њих је решио највише 6 задатака. За сваког дечака и сваку девојчицу постоји бар један задатак који су обоје решили. Доказати да постоји задатак који су решила бар три дечака и бар три девојчице. *(Немачка)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

43. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Вашингтон, Сједињене Америчке Државе – понедељак, 9. јул 2001.

4. Нека је n непаран природан број већи од 1 и нека су $k_1, k_2, \ldots, k_n$ цели бројеви. За сваку пермутацију $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ нека је

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Доказати да постоје различите пермутације b и c такве да је $n!$ делилац броја $S(b) - S(c)$. *(Канада)*

5. У троуглу ABC важи $\sphericalangle CAB = 60°$. Симетрала угла BAC сече страницу BC у тачки P, а симетрала угла $\sphericalangle ABC$ сече страницу CA у тачки Q. Ако је $AB + BP = AQ + QB$, наћи углове троугла ABC. *(Израел)*

6. Нека су a, b, c, d природни бројеви, такви да је $a > b > c > d$ и

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

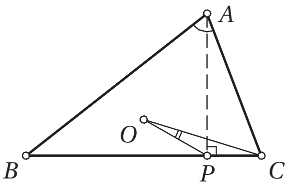
Доказати да $ab + cd$ није прост број. *(Бугарска)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Како је $\sphericalangle OCP = 90^\circ - \sphericalangle A$, треба доказати да је $\sphericalangle OCP > \sphericalangle COP$, тј. $OP > CP$. По неједнакости троугла довољно је доказати да је $CP < \frac{1}{2}CO = \frac{1}{2}R$, што је једноставно: $CP = AC\cos\gamma = 2R\sin\beta\cos\gamma \leqslant 2R\sin\beta\cos(\beta+30^\circ) = R(\sin(2\beta+30^\circ) - \sin 30^\circ) < \frac{1}{2}R$.



2. Наћи ћемо константу $k > 0$ тако да је

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqslant \frac{a^k}{a^k+b^k+c^k} \quad \text{за све } a,b,c>0. \tag{$*$}$$

Ова неједнакост је еквивалентна са $(a^k+b^k+c^k)^2 \geqslant a^{2k-2}(a^2+8bc)$, што се своди на $(a^k+b^k+c^k)^2 - a^{2k} \geqslant 8a^{2k-2}bc$.

С друге стране, А-Г неједнакост даје

$$(a^k+b^k+c^k)^2 - a^{2k} = (b^k+c^k)(2a^k+b^k+c^k) \geqslant 8a^{k/2}b^{3k/4}c^{3k/4},$$

што значи да је $(*)$ задовољено за $k = \frac{4}{3}$. Сада сабирањем $(*)$ са аналогним неједнакостима за $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$ и $\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$ добијамо тражену неједнакост.

Друго решење. Бројеви $x = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$ и $z = \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$ задовољавају релацију $f(x,y,z) = (\frac{1}{x^2}-1)(\frac{1}{y^2}-1)(\frac{1}{z^2}-1) = 8^3$. Треба доказати да је под овим условом $x+y+z \geqslant 1$.

Пошто је f опадајућа функција по свакој од променљивих x,y,z, довољно је показати да ако је $x,y,z>0$ и $x+y+z=1$, онда је $f(x,y,z) \geqslant 8^3$. Како је $\frac{1}{x^2}-1 = \frac{(x+y+z)^2-x^2}{x^2} = \frac{(2x+y+z)(y+z)}{x^2}$ итд, неједнакост $f(x,y,z) \geqslant 8^3$ постаје

$$(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)(y+z)(z+x)(x+y) \geqslant 8^3x^2y^2z^2,$$

што важи на основу А-Г неједнакости.

3. Задатак зовемо *тешким за дечаке* ако су га решила највише два дечака, а *тешким за девојчице* ако су га решиле највише две девојчице.

Проценићемо број парова дечак-девојчица који су обоје решили неки задатак тежак за дечаке. Посматрајмо неку девојчицу. По услову (ii), међу шест задатака које је решила, највише 5 су тешки за дечаке, тј. решени од стране највише 2 дечака. Тако посматраних парова има не више од $21\cdot5\cdot2 = 210$.

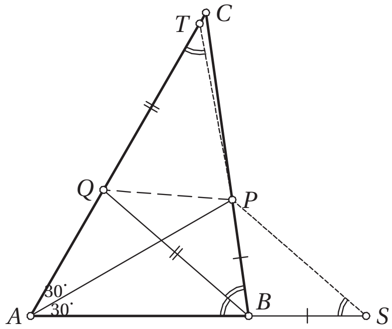
Слично, има највише 210 парова дечак-девојчица који су обоје решили неки задатак тежак за девојчице. Међутим, укупан број парова дечак-девојчица је

$21^2 = 441$. Дакле, у бар 21 пару задатак који су обоје решили није тежак ни за дечаке ни за девојчице.

4. Претпоставимо да су свих $n!$ бројева $S(a)$ различити по модулу $n!$. Тада је сума $\sum_a S(a)$ по свим пермутацијама a једнака $0+1+\cdots+(n!-1) = \frac{(n!-1)n!}{2} \equiv \frac{n!}{2} \pmod{n!}$.

С друге стране, сваки од бројева k_i се у збиру $\sum_a S(a)$ јавља с коефицијентом $(n-1)!(1+2+\cdots+n) = \frac{n+1}{2}n!$, а то је за непарно n дељиво са $n!$. У том случају је и $\sum_a S(a) \equiv 0 \pmod{n!}$, што је контрадикција.

5. Нека су S и T редом тачке на правим AB и AC, са распоредом $A-B-S$ и $A-Q-T$, такве да је $BS = BP$ и $QT = QB$. Дато је да је $AS = AB + BP = AQ + QB = AT$. Пошто је $\sphericalangle PAS = \sphericalangle PAT$, троуглови APS и APT су подударни, и одатле $\sphericalangle ATP = \sphericalangle ASP = \frac{1}{2}\beta = \sphericalangle QBP$, тј. $\sphericalangle QTP = \sphericalangle QBP$.



Ако тачка P није на правој BT, троуглови QBP и QTP морају бити подударни, па P лежи на симетрали угла BQT. Како је AP симетрала угла QAB, P је центар приписаног круга $\triangle QAB$, тако да је и BP симетрала угла QBS. Следи да је $\sphericalangle PBQ = \frac{1}{2}\beta = \sphericalangle PBS = 180^\circ - \beta$, па је $\beta = 120^\circ$, што је немогуће.

Према томе, $P \in BT$, што значи да је $T \equiv C$. Сада из $QC = QB$ добијамо $120^\circ - \beta = \gamma = \frac{1}{2}\beta$, па је $\beta = 80^\circ$ и $\gamma = 40^\circ$.

6. Једнакост из задатка се своди на $a^2 - ac + c^2 = b^2 + bd + d^2$. Тада важи

$$(ab+cd)(ad+bc) = ac(b^2+bd+d^2) + bd(a^2-ac+c^2) = (ac+bd)(a^2-ac+c^2). \qquad (*)$$

Претпоставимо да је $ab+cd$ прост број. Из $a > b > c > d$ следи $ab+cd > ac+bd > ad+bc$. Одатле је $(ac+bd, ab+cd) = 1$, па из $(*)$ добијамо да $ab+cd \mid a^2-ac+c^2$ и $ac+bd \mid ad+bc$, али то је немогуће јер је $ac+bd > ad+bc$.

Напомена. Кључна релација $(*)$ је у ствари Птоломејева теорема у четвороуглу $XYZT$ са $XY = a$, $YZ = c$, $ZT = b$, $TX = d$ и $\sphericalangle Y = 60^\circ$, $\sphericalangle T = 120^\circ$.