40. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Неготин, 15.04.2000.

Први разред

1. На почетку се у епрувети налази једна амеба. Сваке секунде дешава се једна од следеће две промене: или се неколико амеба деле, свака на по седам нових амеба, или тачно једна амеба умире. За које најмање време у епрувети може да буде тачно 2000 амеба?

2. Нека је

$$S = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+2}} + \cdots + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+2} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+2000}}\,.$$

Доказати да је $S > 1003$.

3. Праве a, b, c, редом паралелне страницама BC, CA, AB троугла ABC, повучене су кроз тачку O унутар троугла. Нека a сече AB, AC у C_2, B_1, b сече BC, BA у A_2, C_1, и c сече CA, CB у B_2, A_1, редом. Доказати да троуглови $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имају једнаке површине.

4. Темена многоугла у координатној равни имају целобројне координате, а дужине свих страница су природни бројеви. Доказати да је обим многоугла паран број.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

40. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Неготин, 15.04.2000.

Други разред

1. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао. Доказати да је

$$|AB - CD| + |BC - DA| \geqslant 2|AC - BD|.$$

2. За дато $n \in \mathbb{N}$, колико има низова $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ цифара из скупа $\{0, 1, 2, 3\}$, таквих да за свако $i = 1, 2, \ldots, n-1$ уређени пар (x_i, x_{i+1}) није један од парова $(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3)$?

3. Међу тачкама $1, 2, \ldots, 2n$ на бројевној правој, њих n је обојено плавом, а преосталих n црвеном бојом. Нека су $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ плаве, а $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ црвене тачке. Доказати да збир

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$$

не зависи од бојења и израчунати га.

4. Доказати да се сваки позитиван рационалан број може представити у облику

$$\frac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3},$$

где су a, b, c и d природни бројеви.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

40. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Неготин, 15.04.2000.

Трећи и четврти разред

1. Нека су a и b мимоилазне праве одређене са по два темена коцке, и нека су $P \in a$ и $Q \in b$ тачке такве да је PQ нормално на a и b. Ако су M и N темена коцке на правој a, наћи све могуће вредности односа MP/PN.

2. Таблица 8×8 попуњена је бројевима $1, 2, \ldots, 64$. За свака два броја a, b са $a > b$ који се налазе у истој врсти или колони израчунат је количник a/b. Назовимо *карактеристиком* таблице најмањи од ових разломака. Одредити највећу могућу вредност карактеристике.

3. Означимо са S скуп свих простих бројева p таквих да у децималном запису $1/p$ има основни период дељив са 3. За свако $p \in S$, напишимо $1/p = 0.\overline{c_1 c_2 \ldots c_{3r}}$, где је $3r$ основни период $1/p$, и дефинишимо

$$f(k,p) = c_k + c_{k+r} + c_{k+2r}$$

за све $k = 1, 2, \ldots, r$. Наћи највећу вредност $f(k,p)$ по свим $p \in S$ и k.

4. Доказати да за сваки природан број n важи једнакост

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n-i}{i} 2^{2n-2i} = 2n+1.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

РЕШЕЊА

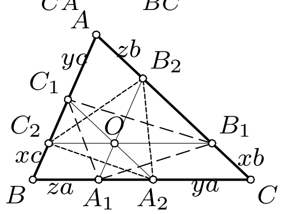
1.1. Пошто се број амеба у свакој секунди смањује за 1 (ако једна амеба умре) или остаје исти по модулу 6 (ако се неке амебе деле), а $2000 \equiv 2 \pmod 6$, бар 5 амеба мора да умре. Даље, број амеба се сваке секунде увећа највише седам пута, а $7^3 < 2000$, па мора да дође до деобе амеба бар 4 пута. Дакле, потребно је бар 9 секунди.

Девет секунди је довољно, што показује пример $1 \to 7 \to 6 \to 42 \to 41 \to 287 \to 286 \to 2002 \to 2001 \to 2000$.

1.2. Како је $1 + \frac{1}{1+2} + \cdots + \frac{1}{1+2+\cdots+n} = \frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} = (\frac{2}{1} - \frac{2}{2}) + (\frac{2}{2} - \frac{2}{3}) + \cdots + (\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}) = \frac{2n}{n+1}$, сума из задатка је једнака $\sum_{n=1}^{2000} \frac{n+1}{2n} = 1000 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{2000} \frac{1}{n}$.

Најзад, како је $\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \geqslant \frac{2^k}{2^{k+1}} > \frac{1}{2}$ за $k \geqslant 1$, једноставном индукцијом добијамо $\sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} > \frac{k}{2} + 1$. Зато је $\sum_{n=1}^{2000} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{2^{10}} \frac{1}{n} > 6$, што даје тражену оцену.

1.3. Нека је $x = \frac{BC_2}{AB} = \frac{CB_1}{CA}$, $y = \frac{CA_2}{BC} = \frac{AC_1}{AB}$, $x = \frac{AB_2}{CA} = \frac{BA_1}{BC}$ и $P = P_{ABC}$. Имамо



$$P_{AB_1C_1} = \frac{AC_1}{AB} \cdot \frac{AB_1}{AC} P = y(1-x)P$$

и слично

$$P_{A_1BC_1} = z(1-y)P \quad \text{и}$$
$$P_{A_1B_1C} = x(1-z)P, \quad \text{па је}$$

$P_{A_1B_1C_1} = P - P_{AB_1C_1} - P_{A_1BC_1} - P_{A_1B_1C} = (1-x-y-z+xy+yz+zx)P$. На исти начин добијамо и $P_{A_2B_2C_2} = (1-x-y-z+xy+yz+zx)P$.

1.4. Нека су темена многоугла $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Дужина странице A_iA_{i+1} је $\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2 + (y_{i+1}-y_i)^2} \equiv \sqrt{(x_{i+1}-x_i+y_{i+1}-y_i)^2} = (x_{i+1}-x_i) + (y_{i+1}-y_i) \pmod 2$, па сабирањем добијамо $A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1 \equiv 0 \pmod 2$.

2.1. Нека је d пречник круга, а α, β, γ периферијски углови над тетивама AB, BC, CD, редом. Тада је

$$\begin{aligned} |AB - CD| = \ & |d\sin\alpha - d\sin\gamma| = 2d|\sin\tfrac{\alpha-\gamma}{2}\cos\tfrac{\alpha+\gamma}{2}|, \quad \text{и} \\ |AC - BD| = \ & |d\sin(\alpha+\beta) - d\sin(\beta+\gamma)| = 2d|\sin\tfrac{\alpha-\gamma}{2}\cos\tfrac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}|. \end{aligned}$$

Из $\alpha+\beta+\gamma < \pi$ следи $\frac{\alpha+\gamma}{2} < \frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2} < 180^\circ - \frac{\alpha+\gamma}{2}$, па је $|\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}| > |\cos\frac{\alpha+2\beta+\gamma}{2}|$, па је $|AC-BD| \leqslant |AB-CD|$. Аналогно је $|AC-BD| \leqslant |BC-DA|$. Сабирањем добијамо жељену неједнакост.

2.2. Означимо са a_n, b_n, c_n, d_n бројеве посматраних низова дужине n који почињу цифром $0, 1, 2$ и 3, редом. Брисање прве цифре даје бијекцију између низова дужине n који почињу јединицом (или тројком) и низова дужине $n-1$ који почињу нулом или јединицом, па је $b_n = d_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ за $n > 1$. Слично имамо $a_n = c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}$ за $n > 1$. Коришћењем једнакости $a_n = c_n$ и $b_n = d_n$ добијамо $a_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} = 2b_n$ и одатле $b_n = 3b_{n-1}$ за $n > 2$. Почетни услов $b_2 = 2$ даје $b_n = 2 \cdot 3^{n-2}$ и $a_n = 4 \cdot 3^{n-2}$ за $n \geqslant 2$, а укупан број низова дужине n је $2a_n + 2b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$, што важи и за $n = 1$.

2.3. Постоји индекс k такав да је $\{1, 2, \dots, n\} = \{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$. Тада је $\{n+1, n+2, \dots, 2n\} = \{b_1, \dots, b_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$, па имамо

$$
\begin{aligned}
&|a_1 - b_1| + \cdots + |a_n - b_n| = \\
&(b_1 - a_1) + \cdots + (b_k - a_k) + (a_{k+1} - b_{k+1}) + \cdots + (a_n - b_n) = \\
&(b_1 + \cdots + b_k + a_{k+1} + \cdots + a_n) - (b_1 + \cdots + b_k + a_{k+1} + \cdots + a_n) = \\
&((n+1) + (n+2) + \cdots + 2n) - (1 + 2 + \cdots + n) = n^2.
\end{aligned}
$$

2.4. Ако ставимо $a = c = b + d$, имамо $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ad + d^2$, па је тада

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + d^3} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a+d)(a^2 - ad + d^2)} = \frac{2b + d}{b + 2d}.$$

Сваки рационалан број $q \in (1, 2)$ се може представити на овај начин: заиста, ако је $n < m < 2n$, онда је $\frac{m}{n} = \frac{2b+d}{b+2d}$ за $b = 2m - n$ и $d = 2n - m$.

За произвољно $q \in \mathbb{Q}^+$, довољно је одабрати бројеве $x, y \in \mathbb{N}$ тако да је $1 < q(\frac{x}{y})^3 < 2$: по претходном, постоје $a, b, d \in \mathbb{N}$ такви да је $\frac{a^3+b^3}{a^3+d^3} = q(\frac{x}{y})^3$, тј. $\frac{(ya)^3+(yb)^3}{(xa)^3+(xd)^3} = q$.

3.1. Нека су темена коцке $A_1(0,0,0)$, $B_1(1,0,0)$, $C_1(1,1,0)$, $D_1(0,1,0)$, $A_2(0,0,1)$, $B_2(1,0,1)$, $C_2(1,1,1)$, $D_2(0,1,1)$.

Нека је $M = A_1$ и нека су $a : M + t\overrightarrow{MN}$ и $b : R + t\overrightarrow{RS}$ једначине правих a и b у параметарском облику. Како је $\overrightarrow{PQ}$ нормалан на $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{RS}$, он је колинеаран са $\vec{a} \times \vec{b}$, па је раван $bP \perp \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ и самим тим $\overrightarrow{PR} \perp \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})$, тј. $\overrightarrow{MP} \cdot (\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})) = \overrightarrow{MR} \cdot (\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$, што најзад даје $\frac{MP}{PN} = \frac{\overrightarrow{MR} \cdot (\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}))}{\overrightarrow{RN} \cdot (\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}))}$. Остаје да испитамо случајеве.

(1°) $N \in \{B_1, C_1\}$, $RS \in \{A_2D_2, A_2C_2, A_2D_1\} \Rightarrow P = A_1$, $\frac{MP}{PN} = 0$;
(2°) $N = B_1$, $RS = A_2C_1 \Rightarrow b \times (a \times b) = (2, -1, 1)$, $\frac{MP}{PN} = 1$;
(3°) $N = C_1$, $RS \in (B_1B_2D_2D_1)$ =раван симетрале $MN \Rightarrow \frac{MP}{PN} = 1$;
(4°) $N = C_1$, $RS = A_2B_1 \Rightarrow b \times (a \times b) = (1, 2, 1)$, $\frac{MP}{PN} = \frac{1}{2}$, $\frac{NP}{PM} = 2$;
(5°) $N = C_2$, $RS = A_2B_2 \Rightarrow b \times (a \times b) = (0, 1, 1)$, $\frac{MP}{PN} = 1$;

(6°) $N = C_2$, $RS = A_2B_1 \Rightarrow b \times (a \times b) = (2,2,2)$, $\frac{MP}{PN} = \frac{1}{2}$, $\frac{NP}{PM} = 2$.

Овим су испитани сви суштински различити случајеви. Дакле, могуће вредности односа $\frac{MP}{PN}$ су $0, \frac{1}{2}, 1, 2, \infty$.

3.2. Означимо са $C(A)$ карактеристику таблице A. Бар два од бројева $\{56, 57, \dots, 64\}$ су у истој врсти и бар два су у истој колони, па бар један од та два пара није пар $(56, 64)$. Зато је $C(A) \leqslant \max\left\{\frac{63}{56}, \frac{64}{57}\right\} = \frac{63}{56} = \frac{9}{8}$.

С друге стране, ако попунимо таблицу тако да је $a_{ij} \equiv i + 8(j - i) \pmod{64}$, свака два броја у истој врсти или колони се разликују за бар 7, и притом су 57 и 64 у различитим врстама и колонама, па је $C(A) \geqslant \frac{63}{56} = \frac{9}{8}$. Према томе, одговор је $\frac{9}{8}$.

3.3. Из $p \mid 10^{3r} - 1$ и $p \nmid 10^r - 1$ следи да $p \mid N = 10^{2r} + 10^r + 1$. Нека је $x_j = \frac{10^{j-1}}{p}$ и $y_j = \{x_j\} = 0.c_jc_{j+1}c_{j+2}\dots$. Тада је $c_j < 10y_j$, па је

$$f(k,p) = c_k + c_{k+r} + c_{k+2r} < 10(y_k + y_{k+r} + y_{k+2r}).$$

Приметимо да је $x_k + x_{k+r} + x_{k+2r} = \frac{10^{k-1}N}{p}$ цео број, па је то и $y_k + y_{k+r} + y_{k+2r}$. Одавде је $y_k + y_{k+r} + y_{k+2r} \leqslant 2$ и, према томе, $f(k,p) < 20$.

Како је нпр. $f(2,7) = 4+8+7 = 19$, највећа могућа вредност $f(k,p)$ је 19.

3.4. Означимо $a_m = \sum_{i=0}^{[\frac{m}{2}]} (-1)^i \binom{m-i}{i} 2^{m-2i}$. Користећи идентитет $\binom{m-i}{i} = \binom{m-i-1}{i} + \binom{m-i-1}{i-1}$ добијамо

$$\begin{aligned} a_m &= \sum_i (-1)^i \binom{m-1-i}{i} 2^{m-2i} + \sum_i (-1)^i \binom{m-1-i}{i-1} 2^{m-2i} \\ &= 2a_{m-1} - a_{m-2} \end{aligned}$$

за свако m. С обзиром на почетне услове $a_0 = 1$ и $a_1 = 2$, једноставном индукцијом се добија $a_m = m + 1$.