41. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Јужна Кореја – Теџон, 13.–25. јул 2000.

Први дан
18. јул 2000.

1. Кружнице Γ_1 и Γ_2 секу се у тачкама M и N. Нека права AB тангира кружнице Γ_1 и Γ_2 у A и B, редом, тако да је тачка M ближа правој AB него што је тачка N. Нека права која садржи тачку M и паралелна је правој AB други пут сече кружницу Γ_1 у тачки C, а кружницу Γ_2 у тачки D. Праве CA и DB секу се у тачки E, праве AN и CD у тачки P, праве BN и CD у тачки Q. Доказати да је $EP = EQ$. *(Русија)*

2. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да је

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$ *(САД)*

3. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. На хоризонталној правој налази се n бува које нису све у истој тачки. За позитиван број λ *потез* се дефинише на следећи начин: бирају се две буве, које се налазе у произвољним тачкама A и B, при чему је тачка A лево од B; бува из тачке A скаче у тачку C, која се на датој правој налази десно од B, тако да је $\dfrac{BC}{AB} = \lambda$.
Одредити све вредности λ, тако да за сваку тачку M на датој правој и произвољан почетни распоред n бува, постоји коначан низ потеза после којих се све буве нађу десно од тачке M. *(Белорусија)*

Други дан
19. јул 2000.

4. Мађионичар има 100 карата нумерисаних бројевима од 1 до 100. Он ставља све карте у три кутије - црвену, белу и плаву, тако да свака кутија садржи бар једну карту. Гледалац из публике прво бира две кутије, а затим бира по једну карту из сваке од њих и саопштава збир бројева на изабраним картама. Знајући тај збир мађионичар одређује кутију из које није бирана карта.
На колико начина мађионичар може да распореди карте у кутије, тако да овај трик увек буде успешан (две расподеле карата су различите ако бар једна карта није оба пута стављена у исту кутију)? *(Мађарска)*

5. Да ли постоји природан број n који је дељив са тачно 2000 различитих простих бројева, такав да је број $2^n + 1$ дељив са n? *(Русија)*

6. Нека су AH_1, BH_2, CH_3 висине оштроуглог троугла ABC. Уписана кружница у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB у тачкама T_1, T_2, T_3, редом. Нека су праве l_1, l_2, l_3 симетричне правим H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 у односу на праве T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, редом. Доказати да праве l_1, l_2, l_3 одређују троугао чија темена припадају кружници уписаној у троугао ABC. *(Русија)*