17. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кишињев, Молдавија – 5. мај 2000.

1. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи
$$f\left(xf(x) + f(y)\right) = \left(f(x)\right)^2 + y.$$
(Албанија)

2. Нека је ABC разностранични оштроугли троугао и E унутрашња тачка тежишне линије AD ($D \in BC$). Нека је тачка F нормална пројекција тачке E на праву BC, M унутрашња тачка дужи EF, а N и P нормалне пројекције тачке M на праве AC и AB, редом. Доказати да праве које садрже симетрале углова PMN и PEN немају заједничких тачака.
(Македонија)

3. Наћи највећи број правоугаоника димензија $1 \times 10\sqrt{2}$ које је могуће добити од правоугаоника димензија 50×90, ако је дозвољено сечење по правама паралелним ивицама датог правоугаоника. *(Југославија)*

4. Природан број r је *степен* ако се може приказати у облику $r = t^s$, где су t и s природни, $s, t \geqslant 2$. Доказати да за сваки природан број n постоји скуп природних бројева A, који задовољава следеће услове:
(i) A има n елемената;
(ii) сви елементи скупа A су степени;
(iii) за све $r_1, r_2, \ldots r_k$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$ из A, број $\dfrac{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}{k}$ је степен.
(Румунија)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.