ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Припремна варијанта, 1998.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени	задаци
3	**1.** Коцка ивице 20 је разложена на 8000 јединичних коцкица, и у сваку коцкицу уписан је број. Познато је да је у сваком ступцу од 20 коцкица, паралелном ивици коцке, сума бројева једнака 1 (разматрају се стубци сва три правца). У једну коцкицу је уписан број 10. Кроз ту коцкицу пролазе три слоја $1\times20\times20$, паралелна странама коцке. Наћи суму свих бројева који су изван тих слојева.
3	**2.** Квадрат целог броја има облик ...09 (завршава се цифрама 0 и 9). Доказати да је трећа сдесна цифра парна.
4	**3.** Тачке A', B' и C' су унутрашње тачке страница BC, CA и AB троугла ABC, тим редом. Познато је да је $\angle AC'B'=\angle B'A'C$, $\angle CB'A'=\angle A'C'B$ и $\angle BA'C'=\angle C'B'A$. Доказати да су тачке A', B', C' средишта страница троугла.
4	**4.** 12 кандидата за градоначелника су говорили о себи. После неког времена један од њих је рекао: "До сада се слагало једанпут". Други је рекао: "А сада већ двапут". "А сада већ трипут" рекао је трећи, и тако даље до 12-ог, који је рекао: "До сада је слагано 12 пута". После тога водитељ је прекинуо дискусију. Испоставило се да је бар један кандидат тачно избројао колико се пута слагало пре њега. Колико су укупно пута кандидати слагали?
5	**5.** Назовимо крокодилом шаховску фигуру чији се ход (потез) састоји у скоку од m поља по вертикали или по хоризонтали, и потом од n поља у правцу нормалном на претходни. Доказати да је за произвољне m и n могуће тако обојити бесконачну шаховску таблу у две боје (за сваке конкретне m и n посебно бојење), да два поља повезана једним ходом крокодила, увек буду различитих боја.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло, Припремна варијанта, 1998.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
3	**1.** Дато је 19 тегова масе 1 г, 2 г, 3 г, ... , 19 г. Девет их је од гвожђа, девет од бронзе и један од злата. Познато је да је укупна маса гвоздених тегова за 90 г већа од укупне масе бронзаних. Нађи масу златног тега.
3	**2.** n папирних кругова полупречника 1 распоређени су у равни тако да њихиви рубови пролазе кроз једну тачку, при чему та тачка лежи унутар области покривене круговима. Та област је многоугао с криволинијским страницама. Нађи његов обим.
4	**3.** На шаховској табли димензија 8×8 означено је 17 пола. Доказати да се од њих могу изабрати два, тако да је коњу потребно бар три скока да стигне са једног од њих на друго.
4	**4.** Разматрају се скупови реалних бројева $\{x_1, x_2, x_3, \ldots x_{20}\}$, који леже између 0 и 1, таквих да је $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{20} = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)\ldots(1-x_{20})$. Нађи међу њима скуп за који је производ $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{20}$ максималан.
	5. Група психолога је направила тест на основу којег свака тестирана особа добија оцену - број Q, која је показатељ њених умних способности (што је веће Q, већа је и способност). За рејтинг земље узима се аритметичка средина вредности Q свих њених становника.
1	а) Група грађана земље А је емигрирала у земљу Б. Показати да је тада могао да порасте рејтинг обе земље.
3	б) После тога група грађана земље Б (међу којима могу бити и бивши емигранти из А) емигрирала је у земљу А. Да ли је рејтинг обеју земала могао опет да порасте?
2	в) Група грађана земље А емигрирала је у земљу Б, а група грађана земље Б - у земљу В. Као резултат тога рејтинзи сваке од тих земала се повећао. После тога смер миграционих токова се променио у супротан: део становника из В прешао је у Б, а део становника из Б - у А. Испоставило се да су после тога рејтинзи све три земље опет порасли (у односу на оне који су били после првог преласка, али пре почетка другог). (То тврде информационе агенције све три земље.) Да ли је то могуће (ако јесте, како, ако није, зашто)? (Претпоставља се: у разматраном временском периоду Q грађана се није мењао, нико није умро и нико се није родио.)

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Основна варијанта, 1998.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

3 — **1.** Нека су a и b природни бројеви. Доказати да NZS(a,a+5)= NZS(b,b+5) повлачи a=b.

4 — **2.** Игор и Вала имају по један бели квадрат 8×8, разложен на пола 1×1. Они су обојили једнаке бројеве поља на својим квадратима у плаву боју. Доказати да је могуће разложити те квадрате на домине 2×1, тако да се и од Игорових и од Валиних домина може сложити по један квадрат 8×8 са истоветном плавом сликом.

5 — **3.** Дуж AB пресеца две подударне кружнице и паралелан је њиховој централној линији, при чему све тачке пресека праве AB с кружницама леже између A и B. Кроз тачку A конструисане су тангенте на кружницу која је ближа тачки A, а кроз тачку B тангенте на кружницу која је ближа B. Испоставило се да те четири тангенте образују четвороугао који садржи обе кружнице унутар себе. Доказати да се у тај четвороугао може уписати кружница.

6 — **4.** У правилном 25-углу су конструисане све дијагонале. Доказати да не постоје девет дијагонала које пролазе кроз једну унутрашњу тачку 25-угла.

7 — **5.** Дато је 20 перли у 10 боја, по две перле сваке боје. Оне су распоређене у 10 кутија. Познато је да се може изабрати по перла из сваке кутије, тако да свака боја буде заступљена. Доказати да је број могућности таквог избора ненулти степен двојке.

7 — **6.** Банда разбојника одузела је трговцу кесу с новчићима. Вредност сваког новчића је цео број гроша. Испоставило се да ако се издвоји било који новчић, остали новчићи могу да се поделе међу разбојницима тако да сваки од них добије исту суму у грошима. Доказати да ако се издвоји један новчић, број преосталих новчића је делив бројем разбојника.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Основна варијанта, 1998.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

1.

2 а) Доказати да $NZS(a,a+5)=NZS(b,b+5)$ (a,b - природни бројеви) повлачи $a=b$.

3 б) Може ли бити $NZS(a,b)=NZS(a+c,b+c)$ (a,b,c - природни бројеви)?

2. Дуж AB пресеца две подударне кружнице и паралелан је њиховој централној линији, при чему све тачке пресека праве AB с кружницама леже између A и B. Кроз тачку A конструисане су тангенте на кружницу која је ближа тачки A, а кроз тачку B тангенте на кружницу која је ближа B. Испоставило се да те четири тангенте образују четвороугао који садржи обе кружнице унутар себе. Доказати да се у тај четвороугао може уписати кружница.

4

3. У таблицу је уписано девет бројева:

5

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, \\ b_1, & b_2, & b_3, \\ c_1, & c_2, & c_3. \end{matrix}$$

Познато је да су шест бројева - збирови врста и збирови стубаца - једнаки међу собом:

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=a_3+b_3+c_3.$$

Доказати да је збир производа врста таблице једнак збиру производа њених стубаца:

$$a_1b_1c_1+a_2b_2c_2+a_3b_3c_3=a_1a_2a_3+b_1b_2b_3+c_1c_2c_3.$$

4. За округлим столом је припремљено 12 места за жири с назнаком имена на сваком месту. Николај Николајевић, који је стигао први, због расејаности није сео на своје него на следеће место у смеру кретања казаљке на часовнику. Сваки члан жирија који је пришао столу после тога, заузео је своје место или је, ако је оно већ било заузето, ишао око стола у смеру кретања казаљке на часовнику и седао на прво слободно место. Добијени распоред чланова жирија зависи од тога којим су редом они прилазили столу. Колико се различитих распореда жирија може добити?

6

5. Називаћемо "величином" правоуглог паралелепипеда суму његове три димензије - дужине, ширине и висине. Може ли се десити да је у неки правоугли паралелепипед смештен правоугли паралелепипед веће "величине"?

7

6. Дата је функција $f(x)=(x^2+ax+b)/(x^2+cx+d)$, где триноми x^2+ax+b и x^2+cx+d немају заједничких корена. Доказати да су следећа два тврђења еквивалентна:

8

1) постоји интервал који не садржи ниједну вредност те функције;

2) $f(x)$ може да се представи у облику:

$$f(x)=f_1(f_2(\ldots f_{n-1}(f_n(x))\ldots)),$$

где свака од функција $f_i(x)$ има један од следећих облика: k_ix+b_i, x^{-1}, x^2.