Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Чачак, 20.03.1999.

Први разред – А категорија

1. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$. Свака од дијагонала AD и BE дели шестоугао на два дела једнаких површина. Доказати да је четвороугао $BDEA$ трапез.

2. Дат је скуп $A \subset \{1, 2, \ldots, 100\}$ који садржи 10 елемената. Доказати да постоје два дисјунктна и непразна подскупа S и T скупа A таква да је збир елемената скупа S једнак збиру елемената скупа T.

3. Нека је m дати цео број. Доказати да постоји бар један пар (x, y) целих бројева такав да важи:

$$2x^2 + 11xy + 12y^2 + 4x + 5y + 6 = 2m.$$

4. У равни су дате кружнице $k_1, k_2, \ldots, k_{1999}$. Кружнице k_1 и k_2 се споља додирују у тачки A_1, кружнице k_2 и k_3 у тачки A_2, итд, k_{1999} и k_1 у тачки A_{1999}. Нека је $M_1 \in k_1$ произвољна тачка, M_2 пресечна тачка праве A_1M_1 и кружнице k_2, M_3 пресечна тачка праве A_2M_2 и k_3, итд, и M_{2000} пресечна тачка праве $A_{1999}M_{1999}$ и k_1. Доказати да су тачке M_1 и M_{2000} дијаметрално супротне на k_1.

5. Природан број $n \geqslant 2$ дели се редом свим природним бројевима који су од њега мањи и записују се сви добијени остаци. Наћи све n за које је збир свих различитих остатака једнак n.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Чачак, 20.03.1999.

Други разред – А категорија

1. Ако су AA_1, BB_1 и CC_1 висине оштроуглог троугла ABC, а A_2, B_2, C_2 редом тачке у којима праве AA_1, BB_1, CC_1 секу круг описан око троугла ABC, доказати да је

$$\frac{AA_2}{AA_1} + \frac{BB_2}{BB_1} + \frac{CC_2}{CC_1} = 4.$$

2. Нека су $a \geqslant b \geqslant c > 0$ реални бројеви такви да је $\sqrt{3a(b-c)} - \sqrt{c(a-b)} = 0$. Ако су x, y, z, p реални бројеви, одредити ком од скупова $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ или $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ припада вредност израза

$$\begin{aligned} f(x,y,z,p) = \; & \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p - i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}z - iy\right) + \\ & + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)(2 + ip)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - iz\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{y}{2} - ix\right)\right]. \end{aligned}$$

3. На табли је написан израз $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Два ученика играју следећу игру: први избрише произвољан од параметара a, b и c и замени га неким реалним бројем. Затим други то исто уради са неким од преосталих параметара. На крају први замени последњи параметар реалним бројем. Ако добијени полином нема позитивних корена, онда је победио ученик који први игра. У супротном игру добија други ученик. Који од ученика може да победи и како треба да игра?

4. Нека су f и g различити квадратни триноми са најстаријим коефицијентом 1. Ако је $f(20) + f(3) + f(1999) = g(20) + g(3) + g(1999)$, наћи све $x \in \mathbb{R}$ за које је $f(x) = g(x)$.

5. Математичар се изгубио у шуми коју покрива област облика бесконачне траке ширине 1km. Доказати да математичар може изабрати такав начин кретања који ће га извести из шуме после највише $2\sqrt{2}$km пређеног пута.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

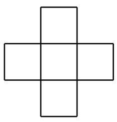
Чачак, 20.03.1999.

Трећи разред – А категорија

1. У тетраедру $ABCD$, ивица AC је нормална на BC, а AD на BD. Доказати да је косинус угла између правих AC и BD мањи од $\dfrac{CD}{AB}$.

2. Нека су z_1, z_2 комплексни бројеви који задовољавају услове $|z_1 - z_2| = 2$ и $z_1 \cdot z_2 = 1$. Доказати да је четвороугао $ABCD$ чија темена имају комплексне координате $-1, z_1, 1, z_2$ једнакокраки трапез.

3. Колико се највише једнакокраких крстића површине 5 може изрезати из табле 6×6?



4. У равни је задато n вертикалних и n хоризонталних правих које се секу у n^2 тачака. Праве су обојене плавом, црвеном или зеленом бојом. Нека је пресек две плаве праве плава тачка, две црвене праве црвена тачка, две зелене праве зелена тачка, пресек плаве и црвене праве зелена тачка, црвене и зелене праве плава тачка, а зелене и плаве праве црвена тачка. На тај начин је добијено n^2 обојених тачака. Колико различитих бојења n^2 тачака добијамо различитим избором бојења правих?

5. Одредити све вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ за које су једначине

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

и

$$\log_{\frac{1}{2}}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

еквивалентне.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Чачак, 20.03.1999.

Четврти разред – А категорија

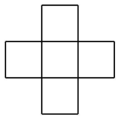
1. Нека је ABC троугао са одговарајућим дужинама страница a, b, c. Доказати да у простору постоји тачка D таква да је $DA = \sqrt{bc}$, $DB = \sqrt{ca}$ и $DC = \sqrt{ab}$.

2. Нека $S(n)$ означава збир свих природних делилаца природног броја n (укључујући 1 и n). Нека је $n_1, n_2, n_3, \dots$ строго растући бесконачан низ природних бројева такав да је $S(n_i) - n_i = m$ за свако $i \in \mathbb{N}$. Одредити m.

3. Дат је низ комплексних бројева $a_1, a_2, \dots, a_{3^k}$ који су сви решења једначине $x^3 = 1$. Од датог низа се у сваком кораку формира нови низ $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_{3^k}a_1$. Доказати да се после неколико корака овим поступком добија полазни низ.

4. У равни је задато n вертикалних и n хоризонталних правих које се секу у n^2 тачака. Праве су обојене плавом, црвеном или зеленом бојом. Нека је пресек две плаве праве плава тачка, две црвене праве црвена тачка, две зелене праве зелена тачка, пресек плаве и црвене праве зелена тачка, црвене и зелене праве плава тачка, а зелене и плаве праве црвена тачка. На тај начин је добијено n^2 обојених тачака. Колико различитих бојења n^2 тачака добијамо различитим избором бојења правих?

5. Колико се највише једнакокраких крстића површине 5 може изрезати из табле 6×6?



Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Чачак, 20.03.1999.

Први разред – Б категорија

1. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$. Свака од дијагонала AD и BE дели шестоугао на два дела једнаких површина. Доказати да је четвороугао $BDEA$ трапез.

2. Доказати да не постоји полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима за који је $P(a) = b$, $P(b) = c$ и $P(c) = a$, где су a, b, c три различита цела броја.

3. Ако су a, b, c дужине страница троугла, доказати да је израз

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$$

негативан.

4. Да ли постоје природни бројеви m и n такви да су и $m^2 + n$ и $n^2 + m$ квадрати целих бројева? (Одговор образложити!)

5. Ако је $ad - bc = 1$, доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \neq 1$.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Чачак, 20.03.1999.

Други разред – Б категорија

1. Ако су AA_1, BB_1 и CC_1 висине оштроуглог троугла ABC, а A_2, B_2, C_2 редом тачке у којима праве AA_1, BB_1, CC_1 секу круг описан око троугла ABC, доказати да је

$$\frac{AA_2}{AA_1} + \frac{BB_2}{BB_1} + \frac{CC_2}{CC_1} = 4.$$

2. Нека су $a \geqslant b \geqslant c > 0$ реални бројеви такви да је $\sqrt{3a(b-c)} - \sqrt{c(a-b)} = 0$. Ако су x, y, z, p реални бројеви, одредити ком од скупова $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ или $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ припада вредност израза

$$\begin{aligned} f(x,y,z,p) = \quad & \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}p - i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}z - iy\right) + \\ & + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)(2 + ip)\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - iz\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{y}{2} - ix\right)\right]. \end{aligned}$$

3. Решити неједначину

$$2 \cdot 125^x - 3 \cdot 50^x - 9 \cdot 20^x + 10 \cdot 8^x \leqslant 0.$$

4. Да ли је број

$$\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}$$

рационалан или ирационалан? (Образложити одговор!)

5. Наћи сва решења једначине

$$x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0.$$

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Чачак, 20.03.1999.

Трећи разред – Б категорија

1. Одредити странице неправоуглог троугла чија је површина цео број, а дужине његових страница су три узастопна најмања могућа парна броја.

2. Дата је права купа полупречника основе R и висине $H = 2R$. Одредити полупречник основе и висину правог ваљка уписаног у ту купу који има највећу површину омотача.

3. Наћи геометријско место тачака симетричних жижи параболе $y^2 = px$ у односу на све тангенте параболе.

4. Доказати да природан број чији је збир цифара једнак 5 не може бити потпун квадрат.

5. Одредити све вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ за које су једначине

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

и

$$\log_{\frac{1}{2}}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

еквивалентне.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Чачак, 20.03.1999.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи све полиноме P такве да за сваки реалан број x важи

$$P(x^2+1) = P(x)^2 + 1 \quad \text{и} \quad P(0) = 0.$$

2. Доказати да за $x > 0$ важи: $\operatorname{arctg} x < x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}$.

3. Дат је низ комплексних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{3^k}$ који су сви решења једначине $x^3 = 1$. Од датог низа се у сваком кораку формира нови низ $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_{3^k}a_1$. Доказати да се после неколико корака овим поступком добија полазни низ.

4. Колико решења у интервалу $[0,1]$ има једначина

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) = 1?$$

5. Одредити све вредности параметра $a \in \mathbb{R}$ за које су једначине

$$a(2a-1)\sin^3 x + 3\cos^3 x - 2a^2 \sin x = 0$$

и

$$\log_{\frac{1}{2}}(3\operatorname{tg} x - 1) - \log_2(3\operatorname{tg} x + 1) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5 - \operatorname{tg} x) = 1$$

еквивалентне.

Време за рад 240 минута.