Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

06.02.1999.

Први разред – А категорија

1. Колико има релација еквиваленције на скупу од шест елемената таквих да свакој класи еквиваленције припадају бар два елемента?

2. Нека су x и y цели бројеви. Ако је $6x + 11y$ дељиво са 31, доказати да је и $x + 7y$ такође дељиво са 31.

3. Природан број облика $4n + 1$ може се представити у облику збира два квадрата ако и само ако се број $8n + 2$ може представити у облику збира два квадрата. Доказати.

4. У кутију је стављено k мањих кутија. Затим се у неке од мањих кутија ставља по k још мањих кутија и овај процес се понови неколико пута. Ако је на крају међу свим тим кутијама m напуњених, колико има празних? (Кутија је напуњена ако у њој има нека мања.)

5. Наћи све вредности $a \in \mathbb{R}$ за које једначина $|x - a| + |a - 1| = 1$ има два решења. Одредити та решења.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

06.02.1999.

Други разред – А категорија

1. Може ли се круг прекрити са два мања круга?

2. Нека су $a, b, c \in \mathbb{N}$ такви да је $\dfrac{ab}{a-b} = c$, $(a, b, c) = 1$. Доказати да је $a - b$ потпун квадрат.

3. Наћи реална решења једначине

$$(16x^{200} + 1)(y^{200} + 1) = 16(xy)^{100}.$$

4. Нека су a, b, c, d четири различита комплексна броја. Ако је број $\dfrac{a-b}{c-b} \cdot \dfrac{c-d}{a-d}$ реалан, доказати да је и број $\dfrac{a-b}{d-b} \cdot \dfrac{d-c}{a-c}$ реалан.

5. Доказати да у произвољном троуглу ABC важи $OH < 3r$, где је H ортоцентар, O центар описане кружнице и r полупречник описане кружнице тог троугла.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

06.02.1999.

Трећи разред – А категорија

1. Решити једначину

$$\log_{27}(2\sin x\cos x - \frac{1}{3}\cos x) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x).$$

2. Шта је веће: $\operatorname{tg}\frac{3}{\pi}$ или $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$?

3. Наћи све природне бројеве n за које је $N = 2^8+2^{11}+2^n$ квадрат природног броја.

4. Израчунати површину паралелограма чије су дијагонале p и q $(p > q)$ и чији је оштар угао α.

5. У равни је задат конвексан многоугао $A_1A_2A_3\ldots A_n$ $(n \geqslant 3)$ чија страница A_kA_{k+1} има дужину a_k $(A_{n+1} = A_1)$. Ако пројекција тог многоугла на праву која садржи страницу A_kA_{k+1} има дужину d_k, доказати да важи

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \cdots + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

06.02.1999.

Четврти разред – А категорија

1. Да ли се круг полупречника 5cm може прекрити са три круга полупречника 2cm, 3cm и 4cm?

2. Ако $\log_2(3^x - 1)$, $\log_4(9 + 9^x - 7 \cdot 3^x)$ и $\log_2(3 - 3^x)$ чине узастопне чланове аритметичке прогресије, наћи x.

3. Доказати једнакост:

$$1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{n(n+1)}{2} = \begin{cases} 2^2 + 4^2 + \cdots + (2 \cdot \frac{n}{2})^2 & \text{за } n \text{ парно;} \\ 1^2 + 3^2 + \cdots + (2 \cdot \frac{n+1}{2} - 1)^2 & \text{за } n \text{ непарно.} \end{cases}$$

4. Доказати да производ шест узастопних природних бројева није пети степен природног броја.

5. У равни је задат конвексан многоугао $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ $(n \geqslant 3)$ чија страница A_kA_{k+1} има дужину a_k $(A_{n+1} = A_1)$. Ако пројекција тог многоугла на праву која садржи страницу A_kA_{k+1} има дужину d_k, доказати да важи

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \cdots + \frac{a_n}{d_n} > 2.$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

06.02.1999.

Први разред – Б категорија

1. Одредити функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ако за све $x \in \mathbb{R}$ важи

$$2f(x) + f(-x) = 2x - 3.$$

2. Да ли постоје природни бројеви n и m $(m > 1)$ такви да важи

$$n^m = 5000000000050000000005$$

(три петице и између њих по 10 нула)?

3. Колико има петоцифрених бројева формираних од цифара $0, 1, 2, 3, 4, 5$ тако да се нула не налази ни на првом ни на последњем месту и да се ниједна цифра не понавља?

4. Колико целих бројева x задовољава неједначину $||x| - 1| \leqslant 1999$?

5. Испитати да ли је број

$$19000098^2 + 19000098^2 \cdot 19000099^2 + 19000099^2$$

потпун квадрат неког природног броја.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

06.02.1999.

Други разред – Б категорија

1. Дата је једначина $x^2 + (3a-1)x + a$, $a \in \mathbb{R}$. Наћи интервал у коме се мора налазити један од корена да би други био позитиван.

2. Нека су z и u комплексни бројеви, $z \neq i$, $u \neq i$. Доказати да је

$$uzi + u + z \neq i.$$

3. Нека су E и F подножја нормала из тачака B и C на симетралу AD угла CAB троугла ABC (D припада BC). Доказати да је тада

$$AE \cdot DF = AF \cdot DE.$$

4. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и

$$m = \left(\frac{1}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}} - \frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}} \right)^n .$$

Одредити све n тако да број m буде рационалан.

5. Нека су x и y реални бројеви већи од 1. Доказати да важи

$$\frac{x+y}{1+xy} < \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} .$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

06.02.1999.

Трећи разред – Б категорија

1. У троугао са страницама $a = 20$, $b = 13$, $c = 11$ уписан је полукруг чији је центар на најдужој страници и који додирује преостале две странице. Израчунати дужину полупречника тог полукруга.

2. Основа пирамиде је паралелограм чије су странице дужина 10 и 18, а површина 90. Висина пирамиде је 6, а њено подножје је пресек дијагонала основе. Израчунати површину омотача пирамиде.

3. Наћи сва реална решења неједначине

$$\sqrt{\pi^2 - x^2} \cdot (\log_{\operatorname{tg} x} \sin x + \log_{\operatorname{tg} x} \cos x + 2 \log_{\operatorname{tg} x} 2) \geqslant \log_{\sin x} \operatorname{tg} x + \log_{\sin x} \operatorname{ctg} x.$$

4. У зарубљену купу уписана је сфера полупречника r. Изводница купе нагнута је према равни основе под углом α. Израчунати површину омотача зарубљене купе.

5. Шта је веће: $\cos(-2204^\circ)$ или $\sin 2656^\circ$?

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

06.02.1999.

Четврти разред – Б категорија

1. Одредити реални параметар a тако да полином $x^3 + ax + 1$ има једну двоструку и једну једноструку нулу.

2. У једнакостранични троугао странице a уписан је круг. У тај круг уписан је нови једнакостранични троугао. У тај троугао поново је уписан круг итд. Одредити збир површина свих тих кругова.

3. Одредити област вредности функције

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x^2 - 4x + 3}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 1,\ x \neq 3.$$

4. Одредити модул и аргумент комплексног броја

$$z = 1 - \cos\frac{10\pi}{9} - i\sin\frac{10\pi}{9}.$$

5. Низ функција $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ дефинисан је на следећи начин:

$$f_1(x) = \frac{x}{x-1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_{n+2}(x) = f_{n+1}(f_n(x)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Наћи $f_{2000}(x)$.

Време за рад 180 минута.