Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.1999.

Први разред – А категорија

1. Дат је конвексан петоугао $A_1A_2A_3A_4A_5$. Нека су B_1, B_2, B_3, B_4 средишта страница A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, редом. Означимо са M и N средишта дужи B_2B_4 и B_1B_3. Одредити однос дужина дужи MN и A_1A_5.

2. Дат је полином

$$P(x) = x^{2000} - 2000x^{1999} + 2000x^{1998} - \cdots + 2000x^2 - 2000x + 2000.$$

Израчунати $P(1999)$.

3. Колико има парова (x, y) рационалних бројева таквих да је $2x^2 + 5y^2 = 1$?

4. Дат је скуп A. Међу његовим подскуповима дефинишемо релацију $\sim$:

$$X, Y \subset A,\ X \sim Y \ \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset.$$

Испитати да ли је релација $\sim$ рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна.

5. Нека је M унутрашња тачка паралелограма $ABCD$. Доказати да је $MA + MB + MC + MD$ мање од обима паралелограма.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.1999.

Други разред – А категорија

1. Решити једначину:

$$8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33.$$

2. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$ бројеви за које важи $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c=0$. Доказати да једначина $ax^2+bx+c=0$ има бар једно решење у интервалу $(0,1)$.

3. Нека је $ABCD$ правоугаоник површине S и M тачка унутар њега. Доказати да је $S \leqslant AM \cdot CM + BM \cdot DM$.

4. Да ли постоје $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ такви да важи

$$(x+y\sqrt{2})^2+(z+t\sqrt{2})^2=5+4\sqrt{2}\,?$$

5. На такмичењу се срело 7 ученика. Сваки од њих говори највише два језика. Доказати да међу њима постоје три тако да сва тројица говоре истим језиком или да никоја два од њих не говоре заједничким језиком.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.1999.

Трећи разред – А категорија

1. Нека су Ox, Oy, Oz три полуправе у простору са заједничком почетном тачком O. Ако за било који избор тачака A, B, C различитих од O, редом са полуправих Ox, Oy, Oz, важи да је троугао ABC оштроугли, доказати да су полуправе међусобно нормалне.

2. Решити неједначину:

$$1 \leqslant |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}.$$

3. Нека је P полином четвртог степена такав да је $P(1) = P(-1)$ и $P(2) = P(-2)$. Доказати да је тада $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ парна функција, тј. да важи $P(x) = P(-x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

4. Дати су позитивни бројеви $x_1, \ldots, x_n$ који чине аритметичку прогресију са разликом d. Доказати да је

$$\begin{aligned} S = \quad & \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} + \frac{d}{x_1x_2} + \frac{d}{x_1x_3} + \cdots + \frac{d}{x_{n-1}x_n} + \\ & + \frac{d^2}{x_1x_2x_3} + \cdots + \frac{d^2}{x_{n-2}x_{n-1}x_n} + \cdots + \frac{d^{n-1}}{x_1x_2\cdots x_n} \quad = \frac{n}{x_1}\,, \end{aligned}$$

где су узети сви могући производи елемената $x_1, \ldots, x_n$.

5. Дат је троугао ABC са страницама $a > b > c$ и произвољна тачка O у унутрашњости тог троугла. Нека праве AO, BO, CO секу странице троугла ABC у тачкама P, Q и R. Доказати да је $OP + OQ + OR < a$.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.1999.

Четврти разред – А категорија

1. Решити неједначину:

$$1 \leqslant |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}.$$

2. Реални полином P четвртог степена има двоструку нулу $x=1$, а полином $Q(x)=P(x)+1$ има двоструку нулу $x=-1$. Одредити полином P ако је $Q(0)=-2$.

3. За сваки природан број k постоји природан број n такав да је $n\cdot 2^k+17$ потпун квадрат. Доказати.

4. На правој је изабрано 1001 различитих тачака $A_1, A_2, \ldots, A_{1001}$. Нека је M скуп средишта свих дужи A_iA_j, $1 \leqslant i < j \leqslant 1001$. Колико најмање тачака може да буде у скупу M?

5. Дат је троугао ABC са страницама $a > b > c$ и произвољна тачка O у унутрашњости тог троугла. Нека праве AO, BO, CO секу странице троугла ABC у тачкама P, Q и R. Доказати да је $OP+OQ+OR<a$.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.1999.

Први разред – Б категорија

1. Ако је n природан број већи од 2, доказати да је број

$$\frac{n^{12} - 128n^6 + 4096}{(n^3 - 4n^2 + 8n - 8)^2}$$

потпун квадрат природног броја.

2. Дат је полином

$$P(x) = x^{2000} - 2000x^{1999} + 2000x^{1998} - \cdots + 2000x^2 - 2000x + 2000.$$

Израчунати $P(1999)$.

3. Нека су тачке K и L редом средишта страница CD и AD квадрата $ABCD$, а S пресечна тачка дужи BK и CL.

(а) Доказати да је четвороугао $ABSL$ тетиван.

(б) Докаати да је троугао ASB једнакокрак.

4. Дат је скуп A. Међу његовим подскуповима дефинишемо релацију $\sim$:

$$X, Y \subset A,\ X \sim Y \ \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset.$$

Испитати да ли је релација $\sim$ рефлексивна, симетрична, антисиметрична или транзитивна.

5. Наћи све просте бројеве p такве да су и бројеви $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ прости.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.1999.

Други разред – Б категорија

1. Да ли једначина $m^3 - n^3 = 1999$ има решења у скупу целих бројева?

2. Наћи минимум и максимум функције

$$y = -x^2 + 3|x-1| + 2$$

на интервалу $[-2, 2]$.

3. За које вредности реалног параметра p систем неједначина

$$-9 < \frac{3x^2 + px - 6}{x^2 - x + 1} < 6$$

важи за све реалне вредности x?

4. Решити једначину: $\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x^2-1}$.

5. Нека је AA_1 тежишна дуж троугла ABC. Ако је X тачка дужи BA_1 и t права која садржи X и паралелна је са AA_1, означимо са Y и Z тачке пресека праве t са правим AB и AC редом. Доказати да збир дужина дужи ZX и YX не зависи од избора тачке X.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.1999.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити неједначину:

$$1 \leqslant |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}.$$

2. У праву купу висине h и изводнице s уписан је прав ваљак тако да је површина омотача ваљка једнака површини омотача дела купе изнад ваљка. Одредити висину ваљка.

3. Нека су $\vec{u} = a\vec{x} + b\vec{y}$ и $\vec{v} = c\vec{x} + d\vec{y}$ колинеарни вектори и $ad - bc \neq 0$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Доказати да су вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ такође колинеарни.

4. Ако је $\sin\alpha + \sin\beta = a$ и $\cos\alpha + \cos\beta = b$, изразити $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$ помоћу a и b.

5. У зависности од реалних параметара a и b решити систем:

$$\begin{aligned} x + ay + z &= 3 \\ x + 2ay + z &= 4 \\ bx + y + z &= 4. \end{aligned}$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

20.02.1999.

Четврти разред – Б категорија

1. Решити неједначину:

$$1 \leqslant |\cos x|^{\sqrt{2x-3}\cdot\log_{|\cos x|}\left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1-2\cos^2 x)}\right)}.$$

2. Нека је $k>1$ и n паран природан број. Решити неједначину по x:

$$\log_3 x - 2k\log_{3^2} x + 3k^2\log_{3^3} x - \cdots + n(-k)^{n-1}\log_{3^n} x > \frac{1-(-k)^n}{1+k}\log_3(x^2-2).$$

3. Нека је P полином четвртог степена такав да је $P(1)=P(-1)$ и $P(2)=P(-2)$. Доказати да је тада $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ парна функција, тј. да важи $P(x)=P(-x)$ за свако $x\in\mathbb{R}$.

4. Наћи све аритметичке прогресије са разликом $d=2$ код којих односи $S_{5n}:S_n$ збира првих $5n$ и првих n сабирака не зависе од n.

5. У сферу полупречника $3\mathrm{cm}$ уписана је купа максималне запремине. Наћи висину и полупречник основе купе.

Време за рад 180 минута.