40. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Букурешт, Румунија – петак, 16. јул 1999.

1. Одредити све коначне скупове S тачака у равни који садрже бар три тачке и задовољавају следећи услов:

- за сваке две различите тачке A и B из S, симетрала дужи AB је оса симетрије скупа S. *(Естонија)*

2. Нека је $n \geqslant 2$ природан број.

(а) Одредити најмању константу C тако да неједнакост

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j)^2 \leqslant C \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \right)^4 \qquad (*)$$

важи за све реалне бројеве $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$.

(б) За ту константу C одредити када важи једнакост. *(Пољска)*

3. Дата је квадратна табла $n \times n$, где је n паран природан број. Табла је подељена на n^2 јединичних квадрата. Два различита јединична квадрата на табли су *суседна* ако имају заједничку страницу.

Означено је N јединичних квадрата тако да је сваки јединични квадрат (означен или неозначен) суседан са бар једним означеним квадратом.

Одредити најмању могућу вредност броја N. *(Белорусија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

40. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Букурешт, Румунија – субота, 17. јул 1999.

4. Одредити све парове (n, p) природних бројева за које важи:

p је прост број,
$n \leqslant 2p$, и
број $(p-1)^n + 1$ је дељив са n^{p-1}. *(Тајван)*

5. Кругови Γ_1 и Γ_2 налазе се унутар круга Γ и додирују Γ у различитим тачкама M и N, редом. Круг Γ_1 пролази кроз центар круга Γ_2. Права која садржи две тачке пресека кругова Γ_1 и Γ_2 сече Γ у тачкама A и B. Праве MA и MB секу Γ_1 у C и D, редом.

Доказати да је права CD тангента круга Γ_2. *(Русија)*

6. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

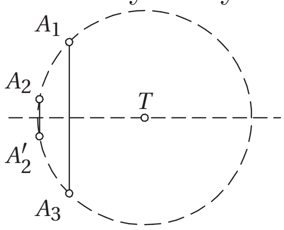
за све $x, y \in \mathbb{R}$. *(Јапан)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. За произвољне различите тачке $A,B \in S$, симетрија у односу на симетралу s_{AB} дужи AB слика скуп S у себе, па тако слика и тежиште T скупа S у себе. Дакле, $T \in s_{AB}$, тј. $TA = TB$. Следи да цео скуп S лежи на кругу са центром T.



Нека тачке скупа S одређују конвексан многоугао $A_1A_2\dots A_n$. Тачка A_2' симетрична тачки A_2 у односу на $s_{A_1A_3}$ је на луку $A_1A_2A_3$ и припада скупу S, па мора бити $A_2' \equiv A_2$. Одавде је $A_1A_2 = A_2A_3$; слично је $A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_nA_1$, тј. тачке $A_1, A_2, \dots, A_n$ су темена правилног n-тоугла.

Јасно је да овакви скупови задовољавају услов задатка.

Напомена. Првобитна верзија задатка тражила је да се одреде сви овакви коначни скупови тачака у *простору*. Такав задатак би био дужи, а појавила би се два нова скупа: темена правилног тетраедра или правилног октаедра.

2. Ако нису сви x_i једнаки 0 (у супротном је неједнакост тривијална), због хомогености можемо да сматрамо да је $\sum_i x_i = 1$. Лева страна неједнакости постаје

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_i x_i^3 \sum_{j \neq i} x_j = \sum_i x_i^3 (1 - x_i) = \sum_i f(x_i),$$

где је $f(x) = x^3 - x^4$.

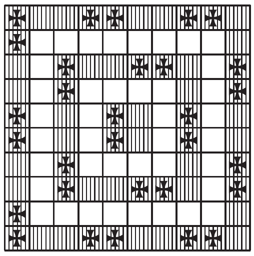
Како је $f(x+y) + f(0) - f(x) - f(y) = 3xy(x+y)\left(\frac{2}{3} - x - y\right)$, вредност F расте ако се два позитивна броја x и y са $x + y \leqslant \frac{2}{3}$ замене бројевима 0 и $x+y$. Ова операција се увек може извршити ако су међу бројевима x_i бар три различита од нуле. Тако њеном поновљеном применом добијамо $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant F(a, 1-a, 0, \dots, 0) = \frac{1}{2}(2a(1-a))(1 - 2a(1-a)) \leqslant \frac{1}{8}$, уз једнакост за $a = \frac{1}{2}$. Следи да је $C = \frac{1}{8}$ за све n, при чему једнакост важи ако и само ако су два броја x_i једнака, а остали су нуле.

Друго решење. Означимо $M = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Користећи неједнакост $ab \leqslant \frac{1}{8}(a+2b)^2$ имамо

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant M \sum_{i<j} x_i x_j \leqslant \frac{1}{8}\left(M + 2\sum_{i<j} x_i x_j\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^4,$$

уз једнакост ако и само ако је $M = 2\sum_{i<j} x_i x_j$ и $x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = M x_i x_j$ за све $i < j$.

3. Нека је $n = 2k$. Скуп квадратних поља чији су центри на растојању $i - \frac{1}{2}$ од најближе ивице квадрата ($i = 1, 2, \dots, k$) зовемо *i-тим оквиром.* Поља i-тог оквира бојимо у црно за непарно i, а у бело за парно i. Овако је свако поље табле (ма



које боје) суседно са тачно два црна поља. Како црних поља има $2k(k+1)$, морамо да означимо бар $k(k+1)$ поља.

Остаје да покажемо да се овај број може достићи. У сваком црном оквиру означимо поље у доњем левом углу и поље непосредно изнад, а затим, идући дуж тог оквира у смеру казаљке на сату, наизменично прескачемо и означавамо по два поља. Лако се види да свако поље има тачно једног означеног суседа, а означено је $2(2k-1)+2(2k-5)+2(2k-9)+\cdots = k(k+1)$ поља.

Према томе, одговор је $k(k+1)$.

Напомена. На сличан начин се могу решити и случајеви $n=4k-1$ и $n=4k+1$. У општем случају одговор је $(2[\frac{n}{4}]+1)(n-2[\frac{n}{4}])$.

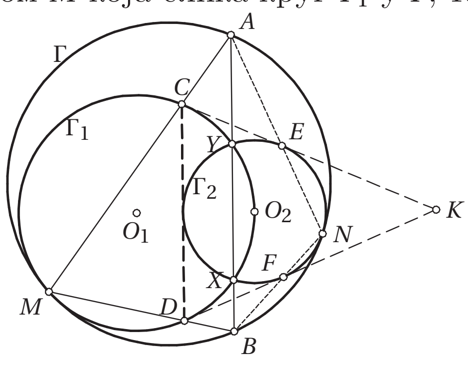
4. Једина решења за $n<3$ или $p<3$ су $(2,2)$ и $(1,p)$ за произвољан прост број p. Надаље сматрамо да је p, а самим тим и n, непарно.

Посматрајмо најмањи прост делилац q броја n. Из $q \mid (p-1)^n+1 \mid (p-1)^{2n}-1$ следи да поредак δ броја $p-1$ по модулу q дели $2n$. С друге стране, знамо да $\delta \mid q-1$, па $\delta \mid (2n, q-1) = 2$, тј. $q \mid (p-1)^2-1 = p(p-2)$. Притом није могуће да $q \mid p-2$, јер би тада било $(p-1)^n+1 \equiv 2 \pmod q$. Следи да је $q=p$, па због $n<2p$ мора бити $n=p$. Услов задатка постаје

$$p^{p-1} \mid (p-1)^p+1 = p^p - \binom{p}{1}p^{p-1} + \binom{p}{2}p^{p-2} - \cdots - \binom{p}{p-2}p^2 + \binom{p}{p-1}p. \qquad (*)$$

Међутим, на десној страни $(*)$ сви сабирци осим последњег су дељиви са p^3, па $p^3 \nmid (p-1)^p+1$. Закључујемо да је $p=3$; заиста, пар $(n,p)=(3,3)$ задовољава услове.

5. Нека се кругови Γ_1 и Γ_2 секу у тачкама X и Y, а праве NA и NB редом секу круг Γ_2 у тачкама E и F. При хомотетији са центром M која слика круг Γ_1 у Γ, тачке C и D се сликају редом у A и B, тако да је $CD \parallel AB$. Из $AC\cdot AM = AX\cdot AY = AE\cdot AN$ следи да су тачке C, E, M и N концикличне, па је $\sphericalangle ACE = \sphericalangle ANM = \sphericalangle ABM = \sphericalangle CDM$. Одавде следи да права CE додирује круг Γ_1. Аналогно, CE додирује и Γ_2, а права DF додирује кругове Γ_1 и Γ_2.



Означимо са K тачку пресека правих

CE и DF, а са O_1 и O_2 редом центре кругова Γ_1 и Γ_2. Тачка O_1 је средиште краћег лука CD круга описаног око троугла CDK. Како је O_2 тачка на симетрали угла CKD и $O_1C = O_1D = O_1O_2$, следи да је O_2 центар уписаног круга троугла CDK (тј. Γ_2 је уписани круг), или центар приписаног круга наспрам K. У оба случаја круг Γ_2 додирује праву CD.

Друго решење. Означимо са r, r_1, r_2 редом полупречнике Γ, Γ_1 и Γ_2. Треба доказати да је растојање $d(O_2, CD)$ од тачке O_2 до праве CD једнако r_2.

Хомотетија са центром M и коефицијентом r/r_1 слика Γ_1, C, D редом у Γ, A, B, па је $CD \parallel AB$ и $d(C, AB) = \frac{r-r_1}{r} d(M, AB)$. Ако је R пресечна тачка правих O_1O_2 и XY, онда је $d(O_2, CD) = O_2R + \frac{r-r_1}{r} d(M, AB)$, тј.

$$d(O_2, CD) = O_2R + \frac{r-r_1}{r}(O_1O_2 - O_2R + r_1 \cos\sphericalangle OO_1O_2), \qquad (*)$$

јер су тачке O, O_1 и M колинеарне. Како је $O_1X = O_1O_2 = r_1$, $OO_1 = r - r_1$, $OO_2 = r - r_2$ и $O_2X = r_2$, косинусна теорема у троугловима OO_1O_2 и XO_1O_2 нам даје $\cos\sphericalangle OO_1O_2 = \frac{2r_1^2 - 2rr_1 + 2rr_2 - r_2^2}{2r_1(r-r_1)}$ и $O_2R = \frac{r_2^2}{2r_1}$, па из (1) добијамо $d(O_2, CD) = r_2$.

6. Убацивање $x = y = 0$ даје $f(-c) = f(c) + c - 1$ за $c = f(0)$, па је $c \neq 0$. Посматрајмо скуп $A = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Стављањем $x = f(y)$ у полазну једначину добијамо $f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2}$ за све $x \in A$. Шта више, за $x_1, x_2 \in A$ имамо

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) + x_1x_2 + f(x_2) - 1 = c - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + x_1x_2 = c - \frac{(x_1 - x_2)^2}{2}.$$

Остаје да приметимо да за свако $x \in \mathbb{R}$ постоје $x_1, x_2 \in A$ такви да је $x_1 - x_2 = x$: заиста, полазна једначина за $y = 0$ даје $f(x - c) - f(x) = cx + f(c) - 1$, што узима све реалне вредности.

Према томе, $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ за све $x \in \mathbb{R}$. Директно се проверава да ова функција задовољава услове задатка.