40. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Румунија – Букурешт, 10.–22. јул 1999.

Први дан
16. јул 1999.

1. Одредити све коначне скупове S тачака у равни, које садрже бар три тачке и задовољавају следећи услов: за сваке две различите тачке A и B из S, симетрала дужи AB је оса симетрије скупа S. *(Естонија)*

2. Нека је $n \geqslant 2$ природан број.
(а) Одредити најмању константу C, тако да неједнакост

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j)^2 \leqslant C \biggl(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \biggr)^4$$

важи за све реалне бројеве $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$.
(б) За ту константу C одредити када важи једнакост. *(Пољска)*

3. Квадратна табла $n \times n$, где је n паран природан број, је подељена на n^2 јединичних квадрата. Два различита јединична квадрата на табли су *суседна* ако имају заједничку страницу. Означено је N јединичних квадрата тако да је сваки јединични квадрат (означен или неозначен) суседан са бар једним означеним квадратом.
Одредити најмању могућу вредност броја N. *(Белорусија)*

Други дан
17. јул 1999.

4. Одредити све парове (n, p) природних бројева за које важи:
(а) p је прост број;
(б) $n \leqslant 2p$;
(в) број $(p-1)^n + 1$ је дељив са n^{p-1}. *(Тајван)*

5. Кружнице Γ_1 и Γ_2 налазе се унутар кружнице Γ и додирују Γ у различитим тачкама M и N, редом. Кружница Γ_1 пролази кроз центар кружнице Γ_2. Права која садржи две тачке пресека кружница Γ_1 и Γ_2 сече Γ у тачкама A и B. Праве MA и MB секу Γ_1 у C и D, редом. Доказати да је права CD тангента кружнице Γ_2. *(Русија)*

6. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да је

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

за све $x, y \in R$. *(Јапан)*