ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ
ЗА МЕЂУНАРОДНУ МАТЕМАТИЧКУ ОЛИМПИЈАДУ

Београд, 22.05.1999.

1. Нека је n природан број и $P(x)$ полином степена $2n$ такав да је

$$P(0) = 1 \quad \text{и} \quad P(k) = 2^{k-1} \text{ за } k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Доказати да је $2P(2n+1) - P(2n+2) = 1$.

2. Дат је троугао ABC са $\sphericalangle A = 90^\circ$ и $\sphericalangle B < \sphericalangle C$. Тангента на описани круг k троугла ABC у тачки A сече праву BC у D. Нека је тачка E симетрична тачки A у односу на BC, X подножје нормале из A на BE, и Y средиште дужи AX. Права BY поново сече k у Z. Доказати да права BD додирује описани круг троугла ADZ.

3. Посматрајмо скуп $A_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ од $2n$ променљивих. Колико има пермутација скупа A_n за које се свакој од $2n$ променљивих може доделити нека вредност из интервала $(0, 1)$ тако да важи:

(i) $x_i + y_i = 1$ за све i;

(ii) $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$;

(iii) $2n$ чланова пермутације чине строго растући низ?

4. За сваки природан број d, означимо са M_d скуп свих природних бројева који се не могу представити у облику збира неколико (бар два) узастопних чланова аритметичке прогресије са разликом d чији су чланови природни бројеви. Доказати да свако $c \in M_3$ може да се напише као $c = ab$, где $a \in M_1$ и $b \in M_2 \setminus \{2\}$.

Време за рад: 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

РЕШЕЊА

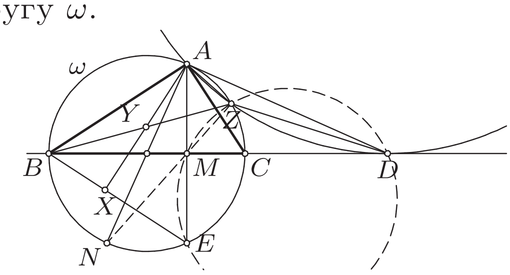
1. Доказаћемо индукцијом по n да је $P(2n+1) = 2^{2n}$ и $P(2n+2) = 2^{2n+1} - 1$.

Тврђење је тривијално за $n \leqslant 1$. Нека је $n \geqslant 2$. Полином $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ (*прва коначна разлика* полинома P) има степен $2n-1$ и задовољава $Q(0) = 0$ и $Q(k) = 2^{k-1}$ за $k = 1, \dots, 2n-1$. Даље, полином $R(x) = Q(x+1) - Q(x)$, степена $2n-2$, задовољава $R(0) = 1$ и $R(k) = 2^{k-1}$ за $k = 1, \dots, 2n-2$, па на њега можемо применити индуктивну претпоставку: на основу ње је $R(2n-1) = 2^{2n-2}$ и $R(2n) = 2^{2n-1} - 1$.

Сада, како је $Q(x+1) = Q(x) + R(x)$ и $P(x+1) = P(x) + Q(x)$, лако рачунамо $Q(2n) = 2^{2n-1}$, $Q(2n+1) = 2^{2n} - 1$, $P(2n+1) = 2^{2n}$ и $P(2n+2) = 2^{2n+1} - 1$, и индуктивни корак је завршен.

Друго решење. Полиноми $P(x)$ и $Q(x) = \binom{x}{0} + \binom{x}{2} + \binom{x}{4} + \cdots + \binom{x}{2n}$ (по дефиницији је $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$) поклапају се у $2n+1$ тачака $0, 1, \dots, 2n$, а оба су степена $2n$, па следи да је $P(x) = Q(x)$ за све x. Сада лако налазимо $P(2n+1) = 2^{2n}$ и $P(2n+2) = 2^{2n+1} - 1$.

2. Нека је M тачка пресека правих AE и BC, а N тачка дијаметрално супротна тачки A на кругу ω.



Због $\sphericalangle B < \sphericalangle C$, тачке N и B су са исте стране праве AE. Даље, како је $\sphericalangle NAE = \sphericalangle BAX = 90^\circ - \sphericalangle ABE$, троуглови NAE и BAX су слични. Пошто је M средиште дужи AE, следи да су и троуглови NAM и BAY слични, па је $\sphericalangle ANZ = \sphericalangle ABZ = \sphericalangle ABY = \sphericalangle ANM$, тј. тачке N, M и Z су колинеарне. Сада је $\sphericalangle ZMD = 90^\circ - \sphericalangle ZMA = \sphericalangle EAZ = \sphericalangle ZED$, што значи да је четвороугао $ZMED$ тетиван. Сада је $\sphericalangle ZDM = \sphericalangle ZEA = \sphericalangle ZAD$, дакле, права MD додирује круг AZD.

Напомена. Тврђење је тачно и ако је $\sphericalangle B \geqslant \sphericalangle C$.

3. Нека је $z_1 < z_2 < \cdots < z_{2n}$ пермутација променљивих $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$. Приметимо да чланови $z_1, z_2, \dots, z_n$ једнозначно одређују пермутацију: ако је $z_i = x_k$ за неко k, онда је $z_{2n+1-i} = y_k$. С друге стране, таква пермутација задовољава услове: за $i = 1, \dots, n$, довољно је ставити $(x_k, y_k) = (\frac{i}{2n+1}, \frac{2n+1-i}{2n+1})$ ако је $z_i = x_k$ за неко k, и $(x_k, y_k) = (\frac{2n+1-i}{2n+1}, \frac{i}{2n+1})$ ако је $z_i = y_k$.

Почев од z_1, сваки од чланова $z_1, z_2, \dots, z_n$ се може изабрати на два начина: као x_i са најмањим неискоришћеним i, или као y_j

са највећим неискоришћеним j. Према томе, могућих низова $(z_1, \ldots, z_n)$, а самим тим и тражених пермутација, има 2^n.

4. Природан број n није у M_d ако и само ако је $n = a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(a+(k-1)d) = \frac{1}{2}k(2a+d(k-1))$ за неке $a, k \in \mathbb{N}$ $(k > 1)$, тј. ако и само ако је, за бар једно $1 < k \mid 2n$, број $2a = \frac{2n}{k} - d(k-1)$ позитиван и паран.

Претпоставимо да је $n \in M_d$. Нека је $2n = 2^\ell m$, где је m непарно.

(1°) Нека је $d = 1$. Разлика $f(k) = \frac{2n}{k} - (k-1)$ је парна за $k = 2^\ell$ и $k = m$. Ако је $m > 1$, онда је $f(2^\ell) = m - 2^\ell + 1 \leqslant 0$ и $f(m) = 2^\ell - m + 1 \leqslant 0$, што је немогуће. Следи да је $m = 1$. Дакле, $M_1 = \{2^t \mid t \in \mathbb{N}_0\}$.

(2°) Нека је $d = 2$. Разлика $f(k) = \frac{2n}{k} - 2(k-1)$ је парна ако $k \mid n$, па за такве $k > 1$ важи $f(k) \leqslant 0$, тј. $n \leqslant k(k-1) < k^2$, дакле сви делиоци броја n већи од 1 су већи од $\sqrt{n}$. Следи да је $M_2 = \{n \mid n \text{ је прост или } n = 1\}$.

(3°) Нека је $d = 3$. Претпоставимо да је m сложен број и p његов најмањи прост делилац: тада је $p^2 \leqslant m$. Разлика $f(k) = \frac{2n}{k} - 3(k-1)$ је парна за $k = 2^\ell$ и $k = p$. Из $f(p) = \frac{2^\ell m}{p} - 3(p-1) < 0$ следи $2^\ell m < 3p(p-1) < 3p^2 \leqslant 3m$, тј. $2^\ell = 2$, али онда је $f(2^\ell) = m - 3(2^\ell - 1) = m - 3 < 0$, контрадикција. Дакле, m није сложен, па је $M_3 \subset \{n = 2^t q \mid q \text{ је прост или } q = 1\}$.

Тврђење задатка одмах следи из описа скупова M_1, M_2 и M_3.