16. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Охрид, Македонија – 8. мај 1999.

1. Нека је D средиште краћег лука BC описаног круга оштроуглог троугла ABC. Тачке E и F су редом симетричне тачки D у односу на праву BC и центар описаног круга. Нека је K средиште дужи EA.

(a) Доказати да круг који пролази кроз средишта страница троугла ABC такође пролази кроз K.

(b) Доказати да је права кроз K и средиште странице BC нормална на AF. *(Турска)*

2. Нека је $p > 2$ прост број такав да $3 \mid p - 2$. Посматрајмо скуп

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in \mathbb{Z},\ 0 \leq x, y \leq p - 1\}.$$

Доказати да је највише $p - 1$ елемената S дељиво са p. *(Бугарска)*

3. Нека су M, N, P подножја нормала из тежишта G оштроуглог троугла ABC на странице AB, BC, CA, тим редом. Доказати да важи

$$\frac{4}{27} < \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} \leq \frac{1}{4}\,.$$

(Албанија)

4. Дат је низ $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ целих бројева такав да је за свако $k \geq 0$ број чланова који нису већи од k коначан (означимо тај број са y_k). Доказати да за све природне бројеве m, n важи

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \geq (n+1)(m+1).$$

(Румунија)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.