39. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Бечеј, 11.04.1998.

Први разред

1. Доказати да је $\sqrt{2}(\sqrt[3]{3}+2)+\sqrt[3]{9} > 4+\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$

2. Одредити међусобно различите цифре a, b, c, d тако да важи
$$\overline{abccba} = \overline{cda}^2.$$

3. Симетрала угла A оштроуглог троугла ABC сече страницу BC у тачки D. Ако је $AD = AB$ и $AD \perp OH$, где је O центар описаног круга и H ортоцентар троугла, наћи углове троугла ABC.

4. Нека је $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Колико има бијективних пресликавања $f : S \to S$ таквих да је $f(f(x)) - x$ дељиво са 3 за свако $x \in S$?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

39. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Бечеј, 11.04.1998.

Други разред

1. Доказати да не постоји природан број n за који је 8^n+2^n+1 потпун квадрат.

2. Круг k додирује странице A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 конвексног n-тоугла $A_1A_2\ldots A_n$ у тачкама $B_1, B_2, \ldots, B_n$, редом. Нека је M произвољна тачка на кругу k. Доказати да је производ растојања од M до правих $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ једнак производу растојања од M до правих $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_nB_1$.

3. Нека је $n>1$ природан број и нека је

$$S_1 = \left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt{2n}\right] + \left[\sqrt{3n}\right] + \cdots + \left[\sqrt{(n-1)n}\right] \quad \text{и}$$

$$S_2 = \left[\frac{1}{n}\right] + \left[\frac{4}{n}\right] + \left[\frac{9}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{(n-1)^2}{n}\right].$$

Доказати да је $S_1+S_2 \geqslant (n-1)^2$, као и да једнакост важи ако и само ако број n није дељив квадратом ниједног природног броја већег од 1.

4. Дат је низ тачака $A_i(x_i, y_i)$ са $x_i, y_i \in (0,1)$ за $i=1,2,\ldots,n^2$. Доказати да постоји пермутација $(i_1, i_2, \ldots, i_{n^2})$ бројева $1,2,\ldots,n^2$ таква да дужина изломљене линије $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_{n^2}}$ није већа од $2n+1$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

39. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Бечеј, 11.04.1998.

Трећи и четврти разред

1. Нека је $n > 1$ природан број и $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\left(\sum_{i\neq j} a_i b_j\right)^2 \geqslant \left(\sum_{i\neq j} a_i a_j\right)\left(\sum_{i\neq j} b_i b_j\right).$$

2. Одредити најмањи природан број n са следећим својством: постоји пермутација скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ таква да збир ма која три узастопна члана у тој пермутацији није већи од n.

3. Више од половине страна конвексног полиедра могу да се обоје тако да никоје две обојене стране немају заједничку ивицу. Доказати да се у овај полиедар не може уписати сфера.

4. Нека је n природан број већи од 4. Доказати да су следећа два услова еквивалентна:

(i) n и $n+1$ су сложени бројеви;

(ii) цео број најближи броју $\frac{(n-1)!}{n^2+n}$ је паран.

(За реалан број облика $k + \frac{1}{2}$, где је $k \in \mathbb{Z}$, најближи цео број је по дефиницији $k+1$.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

РЕШЕЊА

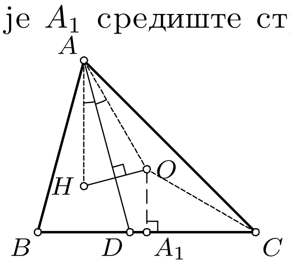
1.1. Означавањем $a = \sqrt{2}$ и $b = \sqrt[3]{3}$ дату неједнакост можемо записати као $a(b+a^2)+b^2 > 2a^2+ab^2$, тј. $b^2+ab-2a^2 > ab^2-a^3$. Дељењем са $b-a > 0$ остаје неједнакост $b+2a > ab+a^2 = ab+2$, тј. $2a-2 > ab-b$, која се опет дељењем са $a-1 > 0$ своди на очигледну $2 > b$.

1.2. Број $\overline{abccba} = (10^5+1)a + (10^3+1)b + 11c$ је дељив са 11, па је то и $x = \overline{cda}$. Даље, из $x^2 \equiv x \equiv a \pmod{10}$ следи да је $a \in \{1,5,6\}$.

- Ако је $a = 1$, онда је $10^5 < x^2 < 2 \cdot 10^5$, па је $c \in \{3,4\}$, а из $11 \mid x$ онда добијамо $x = 341$ и $x^2 = 116281$, или $x = 451$ и $x^2 = 203401$.
- Ако је $a = 5$, мора бити $c = 7$, па из $11 \mid x$ следи $x = 715$ и $x^2 = 511225$.
- Ако је $a = 6$, имамо $c \in \{7,8\}$ и одатле $x = 726$ и $x^2 = 527076$, или $x = 836$ и $x^2 = 698896$.

Једино $x = 836$ задовољава услове, па су $(a,b,c,d) = (6,9,8,3)$.

1.3. Подсетимо се да важи $AH = 2OA_1$, где је A_1 средиште странице BC. Како је $\sphericalangle DAH = \sphericalangle DAO = \frac{|\beta-\gamma|}{2}$, тачке H и O су симетричне у односу на праву AD, па је $CO = AO = AH = 2OA_1$, одакле добијамо $\alpha = \sphericalangle A_1OC = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAD = 30^\circ$. Сада из $AD = AB$ следи $\beta = \sphericalangle ADB = 75^\circ$ и одатле $\gamma = 45^\circ$.



1.4. Из услова задатка следи да је $f(f(f(f(x)))) = x$ за све $x \in S$, па се пермутација f на S распада на орбите дужине 1, 2 или 4. Могући су следећи случајеви:

(1°) Орбите $(a,b,c,d),(e,f)$: како је $|a-c| = |b-d| = 3$, парове $\{a,c\}$ и $\{b,d\}$ можемо одабрати на 3 начина и распоредити их у орбиту на 2 начина, па имамо укупно 6 могућности;

(2°) Орбите $(a,b,c,d),(e),(f)$: слично као у (1°), 6 могућности;

(3°) Орбите $(a,b),(c,d),(e,f)$: 15 могућности;

(4°) Орбите $(a,b),(c,d),(e),(f)$: 45 могућности;

(5°) Орбите $(a,b),(c),(d),(e),(f)$: 15 могућности;

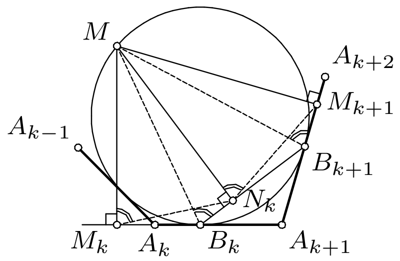
(6°) Орбите $(a),(b),(c),(f),(e),(f)$: 1 могућност.

Према томе, одговор је $6+6+15+45+15+1 = 88$.

2.1. Ако је n непарно, онда је $N = 8^n + 2^n + 1 \equiv 2 \pmod 3$, па N не може бити потпун квадрат. С друге стране, ако је $n = 2k$ парно, онда је $(8^k)^2 < N < (8^k+1)^2$, па опет N није потпун квадрат

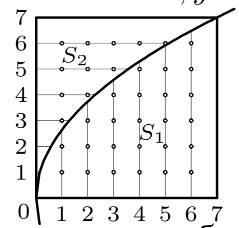
2.2. Нека су M_k и N_k редом подножја нормала из тачке M на праве

A_kA_{k+1} и B_kB_{k+1} (индекси су по модулу n). Због тетивности четвороуглова $MM_kB_kN_k$ и $MN_kB_{k+1}M_{k+1}$ важи $\sphericalangle MM_kN_k = \sphericalangle MB_kB_{k+1} = \sphericalangle MB_{k+1}M_{k+1} = \sphericalangle MN_kM_{k+1}$. Слично важи и $\sphericalangle MN_kM_k = \sphericalangle MM_{k+1}N_k$. Дакле, троуглови MM_kN_k и MN_kM_{k+1} су слични, па је $MM_k \cdot MM_{k+1} = MN_k^2$. Множењем ових релација за $k = 1, 2, \ldots, n$ добијамо тврђење задатка.



2.3. За $1 \leqslant k < n$, $[\sqrt{kn}]$ представља број тачака (k, y) са $y \in \mathbb{N}$ које леже испод параболе $\Gamma(y^2 = nx)$ или на њој. Према томе, укупан број тачака (x, y) са целобројним координатама $0 < x, y < n$ испод или на параболи Γ једнак је S_1.

Слично, $[\frac{\ell^2}{n}]$ је број тачака (x, ℓ) са $x \in \mathbb{N}$ лево од параболе Γ или на њој, па је S_2 једнако укупном броју тачака (x, y) са целобројним координатама $0 < x, y < n$ лево/изнад или на параболи Γ.



Следи да је $S_1 + S_2 = (n-1)^2 + g$, где је g број тачака (x, y) на Γ са целобројним координатама $0 < x, y < n$, тј. таквих да је $y^2 = nx$. Јасно је да је $g \geqslant 0$, при чему је $g > 0$ ако и само ако је n дељиво квадратом већим од 1, чиме је задатак решен.

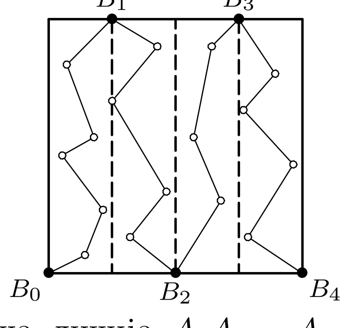
2.4. Тачке можемо означити тако да је

$$0 \leqslant x_1, \ldots, x_{i_1} < \frac{1}{n} \leqslant x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2} < \frac{2}{n} \leqslant \cdots < \frac{n-1}{n} \leqslant x_{i_{n-1}+1}, \ldots, x_{n^2}$$

$$\text{и} \quad y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_{i_1}, \quad y_{i_1+1} \geqslant \cdots \geqslant y_{i_2}, \quad y_{i_2+1} \leqslant \cdots \leqslant y_{i_3}, \quad \text{итд.}$$

Доказаћемо да тада изломљена линија $A_1A_2 \ldots A_{n^2}$ има дужину мању од $2n+1$.

Уочимо тачке $B_0(0,0), B_1(\frac{1}{n}, 1), B_2(\frac{2}{n}, 0), \ldots, B_n(1, \frac{1-(-1)^n}{2})$ и посматрајмо изломљене линије $\ell_k(B_{k-1}A_{i_{k-1}+1} \ldots A_{i_k}B_k)$ за $k = 1, 2, \ldots, n$, при чему је $i_0 = 0$. Дужина пројекције изломљене линије ℓ_k на y-осу је 1, а дужина пројекције сваке од њених $i_k - i_{k-1} + 1$ дужи на x-осу је највише $\frac{1}{n}$. Следи да је дужина ℓ_k мања од $1 + \frac{i_k - i_{k-1} + 1}{n}$.



Спајањем $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ и уклањањем тачака B_k добијамо да изломљена линија $A_1A_2 \ldots A_{n^2}$ има дужину мању од $\sum_k (1 + \frac{i_{k+1} - i_k + 1}{n}) = 2n + 1$, што смо и желели.

3.1. Означимо $A_1 = \sum_i a_i$, $B_1 = \sum_i b_i$, $A_2 = \sum_i a_i^2$, $B_2 = \sum_i b_i^2$ и $C = \sum_i a_i b_i$. Дата неједнакост је еквивалентна са

$$(A_1B_1 - C)^2 \geqslant (A_1^2 - A_2)(B_1^2 - B_2).$$

Како је по Коши-Шварцовој неједнакости $C \leqslant \sqrt{A_2B_2} < A_1B_1$, довољно је доказати неједнакост $(A_1B_1 - \sqrt{A_2B_2})^2 \geqslant (A_1^2 - A_2)(B_1^2 - B_2)$. Она након сређивања постаје $A_1^2B_2 + B_1^2A_2 \geqslant 2A_1B_1\sqrt{A_2B_2}$, што је тачно по А-Г неједнакости.

3.2. Нека је $a_0, a_1, \dots, a_9$ пермутација бројева $1, 2, \dots, 9$ и нека је без смањења општости $a_9 < 9$. Означимо $s_k = a_k + a_{k+1} + a_{k+2}$. Како је $s_0 + s_3 + s_6 = 45 - a_9 \geqslant 37$, бар један од збирова s_0, s_3, s_6 није мањи од 13, дакле $n \geqslant 13$.

За $n = 13$ пермутација $9, 4, 0, 7, 5, 1, 6, 3, 2, 8$ задовољава услове.

3.3. Претпоставимо да је у дати полиедар уписана сфера. Нека су a и b редом бројеви обојених и необојених страна. Посматрајмо све углове $\sphericalangle ATB$, где је T додирна тачка сфере са неком страном полиедра и AB једна ивица те стране. Неки од ових углова су обојени, а неки нису, при чему је збир обојених једнак $2a\pi$, а збир необојених $2b\pi$. С друге стране, свакој ивици AB одговарају два подударна оваква угла (на обе стране), од којих је бар један необојен. Следи да збир обојених углова није већи од збира необојених, тј. $2a\pi \leqslant 2b\pi$, одакле је $a \leqslant b$.

3.4. (а) Нека су n и $n+1$ сложени бројеви. Јасно је да је $n \geqslant 8$. Довољно је доказати да је тада $(n-1)!$ дељиво са $2(n^2+n)$.

Лема. Ако је $n > 4$ сложен број, онда $2n \mid (n-2)!$.

Доказ. Тврђење важи за $n = 6$. Нека је $8 \leqslant n = ab$, $1 < a \leqslant b < n-2$. Ако је $a = b$, онда је $2 < a < 2a \leqslant n-2$, па $2n \mid 2 \cdot a \cdot 2a \mid (n-2)!$. Ако је $a < b$, онда бар један од бројева $2, 4, 6$ није у скупу $\{a, b\}$, рецимо да је то $2k$, па онда $2n \mid 2k \cdot a \cdot b \mid (n-2)!$. □

На основу леме, $(n-1)!$ је дељиво и са $2n$ и са $2(n+1)$, па је дељив и њиховим најмањим заједничким садржаоцем $2n(n+1)$.

(б) Нека је n прост број. Како је $n+1$ сложен, по леми је $A = \frac{(n-1)!}{n+1}$ паран број. По Вилсоновој теореми је $A \equiv (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, па је цео број најближи броју $\frac{(n-1)!}{n^2+n} = \frac{A}{n}$ једнак $\frac{A+1}{n}$, а он је непаран.

Слично, ако је $n+1$ прост број, по леми је $A = \frac{(n-1)!}{n}$ паран број, а по Вилсоновој теореми је $A \equiv -(n-1)! = -\frac{n!}{n} \equiv -1 \pmod{n+1}$, и цео број најближи броју $\frac{(n-1)!}{n^2+n} = \frac{A}{n+1}$ је $\frac{A+1}{n+1}$, а он је непаран.