САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Бечеј, 11. април 1998.

Први разред

1. Доказати да је $\sqrt{2}(\sqrt[3]{3}+2)+\sqrt[3]{9}>4\sqrt{2}\sqrt[3]{9}$.

2. Одредити међусобно различите цифре a, b, c, d тако да важи

$$\overline{abccba}=\overline{cda}^{2}.$$

3. Симетрала угла A оштроуглог троугла ABC сече страницу BC у тачки D. Ако је $AD = AB$ и $AD \perp OH$, где је O центар описаног круга и H ортоцентар троугла, наћи углове троугла ABC.

4. Нека је $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Колико има бијективних пресликавања $f : S \to S$ таквих да је $f(f(x)) - x$ дељиво са 3 за свако $x \in S$?

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Бечеј, 11. април 1998.

Други разред

1. Доказати да не постоји природан број n за који је $8^n + 2^n + 1$ потпун квадрат.

2. Круг k додирује странице $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ конвексног n-тоугла $A_1A_2\ldots A_n$ у тачкама $B_1, B_2, \ldots, B_n$, редом. Нека је M произвољна тачка на кругу k. Доказати да је производ растојања од M до правих $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ једнак производу растојања од M до правих $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_nB_1$.

3. Нека је $n > 1$ природан број и нека је

$$\begin{aligned} S_1 &= \left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt{2n}\right] + \left[\sqrt{3n}\right] + \cdots + \left[\sqrt{(n-1)n}\right] \quad \text{и} \\ S_2 &= \left[\frac{1}{n}\right] + \left[\frac{4}{n}\right] + \left[\frac{9}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{(n-1)^2}{n}\right]. \end{aligned}$$

Доказати да је $S_1 + S_2 \geq (n-1)^2$, као и да једнакост важи ако и само ако број n није дељив квадратом ниједног природног броја већег од 1.

4. Дат је низ тачака $A_i(x_i, y_i)$ са $x_i, y_i \in (0,1)$ за $i = 1, 2, \ldots, n^2$. Доказати да постоји пермутација $(i_1, i_2, \ldots, i_{n^2})$ бројева $1, 2, \ldots, n^2$ таква да дужина изломљене линије $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_{n^2}}$ није већа од $2n+1$.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Бечеј, 11. април 1998.

Трећи и четврти разред

1. Нека је $n > 1$ природан број и $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\left(\sum_{i \neq j} a_i b_j\right)^2 \geq \left(\sum_{i \neq j} a_i a_j\right)\left(\sum_{i \neq j} b_i b_j\right).$$

2. Одредити најмањи природан број n са следећим својством: постоји пермутација скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ таква да збир ма која три узастопна члана у тој пермутацији није већи од n.

3. Више од половине страна конвексног полиедра могу да се обоје тако да никоје две обојене стране немају заједничку ивицу. Доказати да се у овај полиедар не може уписати сфера.

4. Нека је n природан број већи од 4. Доказати да су следећа два услова еквивалентна:

(i) n и $n+1$ су сложени бројеви;

(ii) цео број најближи броју $\frac{(n-1)!}{n^2+n}$ је паран.

(За реалан број облика $k + \frac{1}{2}$, где је $k \in \mathbb{Z}$, најближи цео број је по дефиницији $k+1$.)

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.