Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

21.02.1998.

Први разред

1. Колико трочланих подскупова $\{a, b, c\}$ има скуп $A = \{19, 20, \dots, 98\}$ таквих да је $a + b + c$ дељиво са 3?

2. Нека су a и b реални бројеви за које важи

$$a^3 - 3ab^2 = 8, \quad b^3 - 3a^2b = \sqrt{61}.$$

Наћи $a^2 + b^2$.

3. Доказати да је тачка S центар уписаног круга троугла ABC ако и само ако је

$$a \cdot \overrightarrow{AS} + b \cdot \overrightarrow{BS} + c \cdot \overrightarrow{CS} = 0,$$

где су a, b и c дужине одговарајућих страница.

4. Наћи све сложене бројеве $n \in \mathbb{N}$ који не деле производ свих природних бројева мањих од n.

5. Нека је дат $\triangle ABC$ са угловима $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle B = 60^\circ$, и тачке D и E на страницама AB и BC редом тако да је $\sphericalangle DCA = \sphericalangle EAC = 30^\circ$. Одредити $\sphericalangle CDE$.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

21.02.1998.

Други разред

1. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ такви да су a и $4a+3b+2c$ истог знака. Доказати да једначина $ax^2+bx+c=0$ не може имати оба корена у интервалу $(1,2)$.

2. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Из средишта сваке његове странице конструисана је нормала на наспрамну страницу. Доказати да се те четири праве секу у једној тачки.

3. Наћи све природне бројеве n за које $61 \mid 5^n - 4^n$.

4. У троуглу ABC важи $\sphericalangle A = 30^\circ$, $\sphericalangle B = 80^\circ$. Дата је тачка M унутар троугла тако да је $\sphericalangle MAC = 10^\circ$, $\sphericalangle MCA = 30^\circ$. Наћи $\sphericalangle BMC$.

5. Решити у скупу природних бројева једначину:

$$\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{3x^2-2x-1} = \sqrt[3]{x^2-2x+1}.$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

21.02.1998.

Трећи разред

1. Нека је X тачка у унутрашњости правилног петоугла $ABCDE$ таква да је $\sphericalangle XAB = 48^\circ$ и $\sphericalangle XDC = 42^\circ$. Наћи $\sphericalangle BXC$.

2. У праву купу висине H и полупречника основе R уписан је ваљак највеће површине омотача. Наћи висину ваљка h и полупречник основе r.

3. Решити једначину:

$$9\log_{\sin 2x}(4\cos^2 x) + 8\log_{2\cos x}\sin x = 16.$$

4. Доказати неједнакост

$$\frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+z^3+x^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3} \leqslant \frac{1}{3}\,,$$

где су $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$.

5. Наћи највећи природан број d који је делилац сваког броја облика $n(n+1)(2n+1996)$ за $n \in \mathbb{N}$.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

21.02.1998.

Четврти разред

1. Ако су a_1, a_2, a_3 позитивни реални бројеви који задовољавају услов $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, доказати да важи

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \frac{a_3^2}{a_3+a_1} \geqslant \frac{1}{2}\,.$$

2. Дат је низ $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$ у коме је сваки број почев од трећег једнак збиру претходна два. Доказати да сума осам узастопних елемената тог низа није једнака неком елементу тог низа.

3. Доказати да је збир дужина свих ивица конвексног полиедра већи од $3d$, где је d растојање два најудаљенија темена тог полиедра.

4. Наћи све природне бројеве a, b и c такве да су корени једначина

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + b &= 0 \\ x^2 - 2bx + c &= 0 \\ x^2 - 2cx + a &= 0 \end{aligned}$$

такође природни бројеви.

5. Доказати да је за $n \in \mathbb{N}_0$ број $b = 19 \cdot 8^n + 17$ сложен.

Време за рад 180 минута.